

Anais da

XXXII Semana
Acadêmica da
Matemática
2018

Anais da

XXXII Semana Acadêmica da Matemática

29/10/2018 a 01/11/2018



Realização

Curso de
Matemática



Apoio

CCET
Centro de Ciências
Exatas e Tecnológicas

Comissão organizadora da XXXII Semana Acadêmica da Matemática:

Sandro Marcos Guzzo (Coordenador)
Alessandra dos Santos
Ana Maria Foss
Andréia Büttner Ciani
Arlení Elise Sella Langer
Cléia Fabiane Winck
Clezio Aparecido Braga
Emily Stocco Tori
Fabiana Magda Garcia Papani
Guilherme Gasparini Lovatto
Henrique Zanelatto
Pamela Gonçalves
Rafael Tavares Juliani
Rosângela Villwock

Comitê científico:

Alessandra dos Santos
Amarildo de Vicente
André Vicente
Andréia Büttner Ciani
Arlení Elise Sella Langer
Clezio Aparecido Braga
Flávio Roberto Dias Silva

Pamela Gonçalves
Paulo Domingos Conejo
Pedro Pablo Durand Lazo
Rafael Tavares Juliani
Rosângela Villwock
Sandro Marcos Guzzo
Tiago Emanuel Klüber

Arte da Capa:

Clezio Aparecido Braga

Diagramação:

Sandro Marcos Guzzo

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

S47a	Semana Acadêmica de Matemática (32.: 2018: Cascavel – PR)
	Anais da XXXII Semana Acadêmica de Matemática / Sandro Marcos Guzzo (Coordenador). --- Cascavel (PR): UNIOESTE, 2018. 271p.
	ISSN 2526-0804
	Vários autores
	Evento realizado no Campus de Cascavel no período de 29/10/2018 a 01/11/2018
	1. Matemática-Estudo e Ensino. 2. Ensino superior - Evento. I. Guzzo, Sandro Marcos (Coord.). II. Universidade Estadual do Oeste do Paraná. III. Título.
	CDD 20.ed. 510.63

Rosângela A. A. Silva – CRB 9º/1810

Apresentação

A Semana Acadêmica da Matemática está na sua XXXIII edição. Este é o evento de extensão mais tradicional promovido pelo Curso de Matemática, da UNIOESTE campus de Cascavel. É um evento com periodicidade anual.

Na programação da XXXIII Semana Acadêmica de Matemática figuram palestras, mini-cursos e comunicações orais. As comunicações orais resultam da inscrição dos participantes na modalidade de apresentadores de trabalhos.

Nesta edição da Semana Acadêmica de Matemática, 25 trabalhos foram inscritos e aceitos para apresentação oral e publicação nos anais do evento. São em geral trabalhos resultados das pesquisas de Iniciação Científica e de Monografia desenvolvidos por alunos do curso de Matemática. Registramos também trabalhos realizados por professores do Curso de Matemática da UNIOESTE - Cascavel, e de alunos de outros cursos que desenvolveram suas pesquisas com teor matemático. A apresentação destes trabalhos no evento tem o objetivo de compartilhar os conhecimentos adquiridos pelos alunos e professores nos seus respectivos projetos. O registro destes trabalhos servirá para que os futuros alunos possam também fazer uso deste conhecimento.

A comissão organizadora agradece aos autores pelo envio dos trabalhos e também à comissão científica pelas contribuições dadas durante o processo de avaliação e correção dos trabalhos.

A comissão organizadora.

Índice de trabalhos

Utilização do algoritmo <i>Mountain Trees</i> em problemas de otimização com restrições	9
Aplicações da Álgebra Linear nas Ciências Econômicas: a matriz de insumo-produto	19
Resolução de problemas para o ensino de função afim	31
Unicidade da decomposição cíclica	41
OpenSCAD, gerando modelos tridimensionais para uso no ensino de geometria	53
Monoides e potências de expoente zero	65
Polinômios e Funções Polinomiais	77
Uma experiência com tarefa exploratória no ensino de Função Quadrática	89
Um olhar sobre problemas para a Resolução de Problemas	99
Problemas de designação – formulação matemática, método de solução e aplicações	109
Reflexões sobre alguns enunciados sob a perspectiva da resolução de problemas	119
Uma relação entre superfícies mínimas e superfícies de área mínima.	129
Análise da influência da variável precipitação na produtividade da cultura da soja no estado do Paraná no ano-safra 2011/2012	141
Cadeias de Markov: uma aplicação de álgebra linear	149

A História da Matemática como metodologia de ensino aplicado ao conteúdo de Funções	161
Matrizes e Determinantes: um passeio pela história	171
Introdução às Funções e Domínios Convexos	183
A axiomática de Peano e a construção dos números naturais	195
Relato de experiências com a Modelagem Matemática em disciplina do ensino superior	207
Estudo de matrizes e formas quadráticas	215
A construção do corpo dos quase-homomorfismos	227
O uso de metodologias diferenciadas no ensino da matemática: reflexões a partir do estágio supervisionado	239
O uso de material concreto para o ensino de Geometria Plana: uma atividade aplicada no período do estágio supervisionado	247
Derivada fracionária de Caputo de funções elementares	255
Representação da estrutura espacial de variáveis com dependência espacial	265

Utilização do algoritmo *Mountain Trees* em problemas de otimização com restrições

Amarildo de Vicente
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
amarildo.vicente@gmail.com

Rogério Luiz Rizzi
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
rogeriorizzi@hotmail.com

Cláudia Brandelero Rizzi
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
claudia_rizzi@hotmail.com

André Wilson de Vicente
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
madarassenju63@gmail.com

Resumo: Este trabalho apresenta um algoritmo cujo objetivo é resolver problemas de programação não linear com restrições. O referido algoritmo é baseado em uma heurística que simula o processo de reprodução do reino vegetal, a fim de minimizar funções não lineares irrestritas. Para contornar a existência das restrições faz-se o uso do método das penalidades, que é um procedimento destinado a transformar um problema restrito em um problema irrestrito. A fim de ilustrar o procedimento proposto foram resolvidos alguns modelos idealizados, cujas soluções são conhecidas. Para estas ilustrações e para uma variedade de problemas de pequeno porte analisados o procedimento apresentou um bom desempenho.

Palavras-chave: Otimização; programação não linear; algoritmo *Mountain Trees*.

1 Introdução

A busca por métodos numéricos eficientes para resolver problemas de programação não linear é uma tarefa realizada por muitos pesquisadores dado o desafio que este tipo de problema impõe. Há uma variedade enorme de métodos para este fim, tanto para problemas irrestritos quanto para problemas restritos. Grande parte destes métodos são iterativos e fazem uso de buscas unidirecionais, cujas direções vão sendo alteradas a cada iteração. A forma como estas direções são escolhidas é, em geral, a essência que diferencia um método de outro. Frequentemente quando um problema possui restrições o trabalho para resolvê-lo costuma ficar mais complexo. Neste caso, uma estratégia que pode ser empregada é a técnica das penalidades, que consiste em transformar um problema restrito em um problema irrestrito adicionando-se uma função de penalidades à função objetivo. No entanto, quando um método destinado a problemas restritos é empregado para resolver um problema que faz uso da técnica das penalidades ele

costuma perder a funcionalidade, por não ser capaz de escapar da “parede” imposta por esta função de penalidades.

Neste trabalho será apresentada uma versão do algoritmo *Mountain Trees*, denotado por MT, que primeiramente foi desenvolvido para otimização irrestrita, mas que foi adaptado para lidar com as funções de penalidade. O MT compreende duas formas de busca, uma de caráter global e outra de caráter local. Mais detalhes sobre este processo podem ser vistos em Vicente e Camicia (2009) e em Vicente, Rizzi, R. e Rizzi, C. (2012). Neste trabalho será focada apenas a busca local, que funciona à base de pesquisas unidirecionais.

2 Embasamento Teórico

Em um problema de programação não linear, que será indicado por *ppnl*, a existência de restrições pode trazer sérias dificuldades na sua resolução. O método das penalidades é uma forma de contornar esta dificuldade transformando um problema restrito em um problema irrestrito. Este procedimento consiste em adicionar as restrições à função objetivo, com alguns ajustes apropriados, conforme abordagem a seguir, que pode ser vista com maiores detalhes em Luenberger e Ye (2008).

Seja um *ppnl* contendo uma única restrição de desigualdade como segue.

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } z = f(x) \\ &\text{sujeita a} \end{aligned} \tag{01}$$

$$\begin{aligned} &g(x) \leq 0, \\ &x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Considere-se a função $p(x)$ dada $p(x) = \mu[\max\{0, g(x)\}]^2$, onde μ é uma constante positiva. Adicionando-se a função p , chamada de função de penalidade, à função objetivo, obtém-se o modelo a seguir.

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } w = f(x) + \mu[\max\{0, g(x)\}]^2, \\ &x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{02}$$

Desta forma a função w sofrerá um acréscimo (penalidade) sempre que x estiver fora da região viável, devendo ocorrer $g(x) > 0$. A resolução de um *ppnl* com o uso de penalidades é feita geralmente por meio de um algoritmo iterativo, já que é recomendável que a constante μ seja iniciada com valores pequenos e incrementada gradativamente. Isto fornece um melhor desempenho ao método, evitando, por exemplo, que a sequência gerada convirja para um ponto não viável.

De um modo geral, para um *ppnl* com m restrições de desigualdades o modelo apresenta a forma

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } z = f(x) \\ &\text{sujeita a} \end{aligned} \tag{03}$$

$$\begin{aligned} &g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m, \\ &x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

A função de penalidades para este modelo pode ser representada por

$$p(x) = \mu \sum_{i=1}^m [\max\{0, g_i(x)\}]^k,$$

onde k é um inteiro positivo. Com isto o problema anterior pode ser representado pelo seguinte *ppnl* irrestrito:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } w &= f(x) + p(x), \\ x &\in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{04}$$

Para métodos que empregam derivadas é importante escolher k de forma que a função p seja diferenciável. No modelo ilustrativo (02) tomou-se $k = 2$.

Embora a técnica das penalidades tornem um problema restrito em um problema irrestrito, o uso de alguns métodos iterativos para modelos irrestritos não funcionam adequadamente para um modelo com função de penalidade. Esta função cria uma espécie de parede, para evitar que pontos inviáveis sejam escolhidos como pontos extremos, e esta parede pode impedir que a sequência gerada durante as iterações do processo avance para o ponto extremo desejado.

Considere-se como ilustração o problema

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } z &= (x - 6)^2/4 + (y - 4)^2 \\ \text{sujeita a} \end{aligned} \tag{05}$$

$$x + 2y \leq 10,$$

$$x, y \in \mathbb{R}.$$

A Figura 1 ilustra a região viável R para este problema no primeiro quadrante e também algumas curvas de nível da função z . Sem a presença da restrição é fácil ver que esta função possui valor mínimo $z = 0$ no ponto $P = (6, 4)$. Todavia, com a imposição da restrição o ponto de mínimo passa a ser o ponto $P = (4, 3)$, conforme Figura 1.

A fim de empregar a técnica de penalidades pode-se tomar $p(x) = [\max\{0, x + 2y - 10\}]^2$ e o modelo a ser resolvido toma a forma

$$\text{Minimizar } w = (x - 6)^2/4 + (y - 4)^2 + \mu [\max\{0, x + 2y - 10\}]^2, \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{06}$$

Conforme mencionado anteriormente, o uso de funções quadráticas na função de penalidades p tem como um dos objetivos tornar p diferenciável. Todavia, como não há necessidade de derivadas no método aqui proposto, será usada a função modular. Esta escolha foi feita a fim de que p não tenha uma taxa de crescimento tão grande para pontos distantes da região viável. A Figura 2 mostra os gráficos de z e de w com $p(x) = \mu |\max\{0, x + 2y - 10\}|$ com $\mu = 10$.

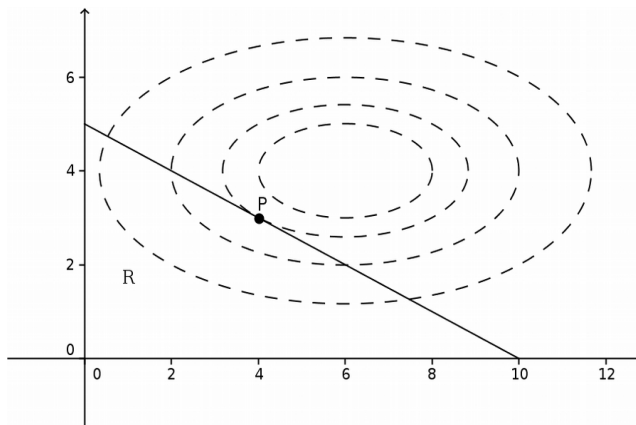


Figura 1: Região viável para o *ppnl* (05) e curvas de nível de z

Suponha que seja empregado o método das Coordenadas Cíclicas para resolver (06) tomando-se $X_1 = (0, 1)$ como ponto de partida. Detalhes sobre este método podem ser vistos em Bazaraa, Sherali e Shetty(2006). Na forma tradicional do método os movimentos na região de busca são feitos nas direções dos eixos coordenados. Seguindo primeiramente na direção do eixo x o segundo ponto da sequência será $X_2 = (6, 1)$, ver Figura 3. O movimento natural do método agora é a direção do eixo y e nesta direção o novo ponto obtido será $X_3 = (6, 2)$. A partir deste ponto não é mais possível avançar em função da restrição imposta, que impede a convergência da sequência gerada para o ponto de mínimo P .

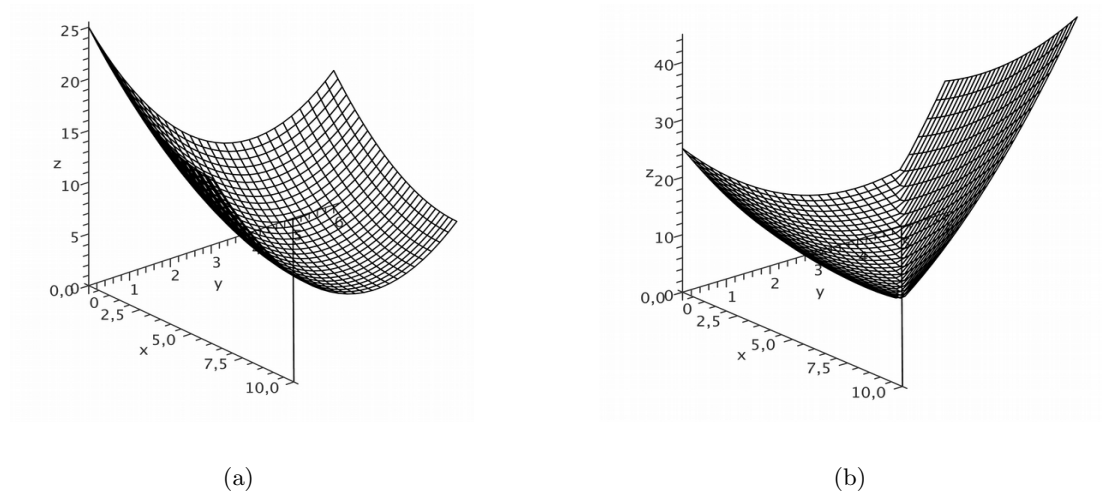


Figura 2: Gráficos das funções utilizadas: (a) função z do *ppnl* (05); (b) função w do *ppnl* (06)

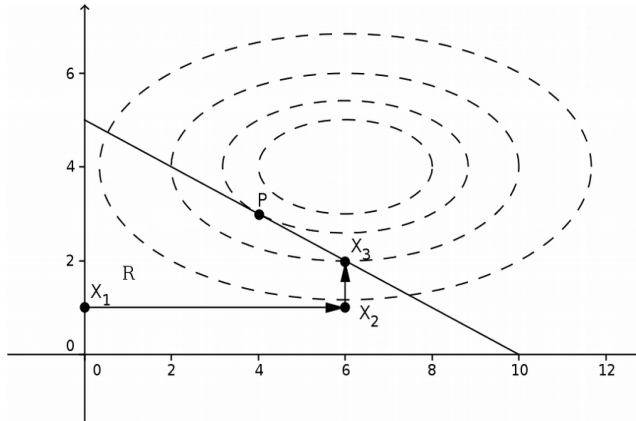


Figura 3: Pontos gerados pelo método das Coordenadas Cíclicas

3 Descrição do método

Conforme mencionado, o propósito deste trabalho é apresentar um processo para resolver problemas de otimização restritos com o uso de funções de penalidades. A fim de realizar esta tarefa será empregado o algoritmo *Mountain Trees*, destinado à otimização de funções não lineares. O método consiste em um processo de busca global multidimensional, que visa localizar possíveis pontos de mínimos locais, e de um conjunto de pesquisas unidirecionais, que visam dar uma precisão aos pontos obtidos na busca global. O foco deste trabalho está no processo de busca unidirecional.

A fim de ilustrar o procedimento considere-se o problema

$$\text{Minimizar } z = (x-6)^2 + (x-y)^2 \quad (07)$$

sujeita a

$$y - 0.25x^2 \geq 0$$

$$y + 0.15x^2 - 8 \leq 0$$

$$x, y \in \mathbb{R}.$$

A Figura 4 mostra os gráficos das restrições e também algumas curvas de nível da função objetivo. Na abordagem que segue são descritos os primeiros passos do processo proposto, que está apresentado em forma de algoritmo no parágrafo seguinte a esta discussão (Algoritmo 1). Será empregada a notação $\vec{v} = \vec{AB}$ para indicar o vetor com origem no ponto A e extremidade no ponto B .

1. Três pontos distintos X , Y e Z são escolhidos aleatoriamente na região de busca. Estes pontos podem ser viáveis ou não. Sejam $\vec{v}$ o versor do vetor $\vec{p} = \vec{XY}$, $\vec{u}$ o versor do vetor $\vec{q} = \vec{XZ}$ e $X_1 = X$.
2. Uma busca unidirecional é feita em um intervalo centrado em X_1 na direção do vetor $\vec{v}$. O melhor ponto obtido, M_1 , é armazenado.
3. Em seguida faz-se um deslocamento de medida ϵ em X_1 na direção do vetor $\vec{u}$, obtendo-se o

ponto X_2 ($X_2 = X_1 + \epsilon \vec{u}$). Uma nova busca unidirecional é feita em um intervalo centrado em X_2 , na direção do vetor $\vec{v}$. O melhor ponto obtido agora é M_2 .

4. Escolhe-se o melhor entre os dois pontos M_1 e M_2 para obter o sentido do próximo deslocamento, desta vez para obter X_3 . Na situação apresentada esta direção é para a direita visto que M_2 é o melhor ponto. Então determina-se o ponto X_3 fazendo-se um deslocamento de medida ϵ em M_2 na direção de $\vec{u}$ ($X_3 = M_2 + \epsilon \vec{u}$). Uma nova busca é feita, agora em um intervalo centrado em X_3 na direção de $\vec{v}$. O melhor ponto obtido nesta busca é M_3 e este ponto é melhor que M_2 . O mesmo procedimento é repetido e o ponto M_4 é encontrado. A partir deste ponto não é mais possível um ponto melhor pois um deslocamento de M_4 em ϵ unidades na direção de $\vec{u}$ conduz a pesquisa para fora da região viável, onde está ativa a função de penalidades. Neste momento reduz-se o valor de ϵ em 50%. Agora o ponto X_5 é obtido deslocando-se M_4 na direção de $\vec{u}$ ($X_5 = M_4 + 0.5\epsilon \vec{u}$). A busca agora é feita em um intervalo centrado em X_5 e na direção de $\vec{v}$, obtendo-se M_5 . Na ilustração apresentada na Figura 4 os pontos escolhidos inicialmente, não representados na figura, foram $X = (1, 3)$, $Y = (1, 4)$ e $Z = (2, 3)$. Na referida figura estão apresentados os primeiros pontos obtidos, M_1 a M_5 .

O ponto para o qual esta sequência converge não é tomado definitivamente como a melhor solução pois o algoritmo MT possui um caráter de busca global. Outros pontos são sorteados e novas execuções desta etapa de busca unidirecional são realizadas, até que um número estipulado de tentativas seja atingido. Um algoritmo descritivo deste processo está apresentado a seguir.

Algoritmo 1

Dados iniciais

$\epsilon > 0$: Um número real pequeno que determina a distância entre os deslocamentos.

α : Um número real tal que $0 < \alpha < \epsilon$. Sua função é estabelecer uma precisão para ponto de mínimo.

1. Escolha aleatoriamente três pontos distintos X , Y e Z na região escolhida para busca.
2. Gere os vetores $\vec{v} = \vec{XY}$ e $\vec{u} = \vec{XZ}$.
3. Realize uma busca centrada em X na direção de v . Seja M_1 o melhor ponto obtido e $S_1 = f(M_1)$.
4. Faça $X = X + \epsilon u$.
5. Realize uma busca centrada em X na direção de v . Seja M_2 o melhor ponto obtido e $S_2 = f(M_2)$.
6. Troque X pelo melhor entre os pontos M_1 e M_2 e faça $MinLocalTemp = \min\{S_1, S_2\}$.
7. Enquanto $\epsilon > \alpha$ faça.
8. $NovoPonto = 1$.
9. Enquanto $NovoPonto = 1$ faça
10. $W = X + \epsilon u$.
11. Realize uma busca centrada em W na direção de v .
12. Sendo M o melhor ponto obtido calcule $S = f(M)$.
13. Se $S < MinLocalTemp$ então faça

14. $X = M$.
 15. $MinLocalTemp = S$.
 16. $NovoPonto = 1$.
 17. Fim {Enquanto}.
 18. Faça $\epsilon = \epsilon/2$.
 19. Fim {Enquanto}.
- A saída é X , o melhor ponto obtido.

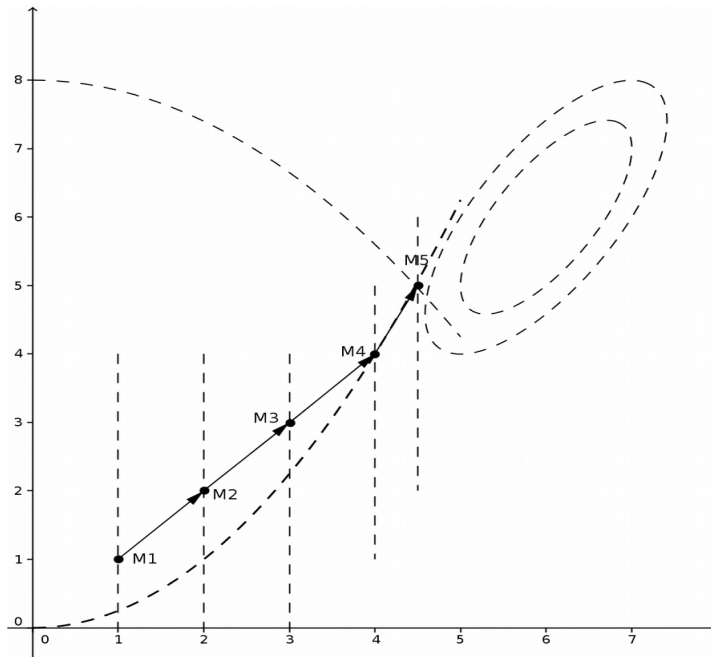


Figura 4: Ilustração gráfica dos primeiros passos do Algoritmo 1 para o *ppnl* (07)

4 Ilustrações e Discussões

Conforme mencionado anteriormente, os casos apresentados a seguir são de caráter ilustrativo apenas e não servem como um experimento para avaliar o algoritmo proposto. Este algoritmo foi utilizado em paralelo com o MT, onde se encontra incorporado, e a execução dos testes foi realizada em um notebook que possui um processador de 2.2 GHz. Os tempos de processamento foram desprezíveis nos casos 1 e 2, de 1 segundo para o caso 3 e de 4 segundos para o caso 4.

1. Considere o *ppnl* (07) que tem como ponto de mínimo $P = (\sqrt{20}, 5)$. Escolhendo-se manualmente $X_1 = (1, 1)$ e fixando-se $\epsilon = 0.5$ e $\alpha = 0.005$ então os sete primeiros pontos gerados pelo algoritmo foram $X_2 = (1.50, 1.50)$, $X_3 = (2.00, 2.00)$, $X_4 = (2.50, 2.50)$, $X_5 = (3.00, 3.00)$, $X_6 = (3.50, 3.50)$, $X_7 = (4.00, 4.00)$ e $X_8 = (4.500, 4.96)$, que está de acordo com a ilustração da Figura 4. A sequência convergiu para o ponto $X^* = (4.47, 4.99)$ no passo 5.

2. Embora este processo seja destinado a resolver *ppnl*, ele também pode ser empregado para resolver um problema de programação linear, *ppl*. Considere o problema a seguir.

$$\text{Minimizar } z = 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 4x_4 \quad (08)$$

sujeita a

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_3 &\leq 4, \\ x_2 - x_4 &\leq 8, \\ -2x_1 + x_2 + 8x_3 + x_4 &\leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 &\geq 0. \\ x_1, x_2, x_3 \text{ e } x_4 &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tomando-se como ponto de partida $X_1 = (0, 0, 0, 0)$ e fixando-se $\epsilon = 0.001$ e $\alpha = 0.0001$, a sequência gerada convergiu para a solução aproximada $\bar{X} = (0.0000, 7.9885, 0.5009, 0.0000)$ no passo 27. A solução ótima é $X^* = (0, 8, 0.5, 0)$, cuja imagem é $z^* = -18$.

3. Considere o *ppnl* que segue, contendo 20 variáveis.

$$\text{Minimizar } z = \sum_{i=1}^{20} (x_i - 4)^2 \quad (09)$$

sujeita a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{20} x_i^2 &\leq 4. \\ x_i &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pode-se mostrar algebricamente por meio do método de Lagrange, que pode ser encontrado em Leithold (1990), que este problema tem como solução $X^* = (2/\sqrt{20}, 2/\sqrt{20}, \dots, 2/\sqrt{20})$, sendo o valor mínimo exato $z^* = 252.4458$, arredondado para quatro casas decimais. Após a execução de 200 iterações do algoritmo foi obtido como valor mínimo aproximado $\bar{z} = 252.4459$, correspondendo a uma diferença da solução exata z^* , em valor absoluto, de 0.0001.

4. Neste problema a função objetivo tem o mesmo formato do anterior, porém, o número de variáveis foi aumentado de 20 para 40. A restrição agora é um hiperplano, também com 40 variáveis.

$$\text{Minimizar } z = \sum_{i=1}^{40} (x_i - 4)^2 \quad (10)$$

sujeita a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{40} x_i &\leq 4. \\ x_i &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

A solução deste problema é $X^* = (1/10, 1/10, \dots, 1/10)$, sendo o valor mínimo exato $z^* = 608.4$. Após a execução de 350 iterações do algoritmo foi obtido como valor mínimo aproximado $\bar{z} = 608,4005$, correspondendo a uma diferença da solução exata z^* , em valor absoluto, de 0.0005.

Os problemas 1 a 4 também foram resolvidos apenas com o algoritmo MT original, sem o uso do Algoritmo 1 aqui proposto. Em relação aos problemas 1 e 2 não houve diferença significativa nos resultados obtidos. Para o problema 3 o valor mínimo obtido foi $z' = 252.5015$, que tem uma diferença absoluta de 0,0557 em relação à solução ótima. Para o problema 4 o valor mínimo obtido foi $z' = 611.7576$, que tem uma diferença absoluta de 3,3576 em relação à solução ótima.

Embora estas soluções apresentem uma pequena diferença em relação ao valor exato é possível obter uma acurácia melhor. No problema 4, por exemplo, aumentando-se o número

de iterações de 350 para 450 chegou-se ao valor $z^*=608.4000$, arredondado para quatro casas decimais, com um tempo de 6 segundos. O tempo de processamento é o ônus desta exigência, que é bastante significativo em problemas com muitas variáveis ou restrições.

5 Conclusões

O método proposto apresentou um bom desempenho para uma variedade de problemas testados, chegando sempre à solução ótima ou a uma solução muito próxima da ótima, dependendo do número de iterações. O tempo de processamento no computador utilizado, notebook de 2.2 GHz, mostrou-se viável para os diversos casos testados. O trabalho de pesquisa, no que diz respeito às buscas unidirecionais, ainda está em fase inicial e um dos aspectos que precisa ser investigado e melhorado é o número de avaliações da função objetivo, que é bastante grande, gerando dificuldades para problemas de grande porte. Este número depende de vários parâmetros usados no modelo, como ϵ , número de pontos usados na busca geral do MT, entre outros, que precisam ser ajustados.

Referências

- BAZARAA, M. S.; SHERALI, H. D.; SHETTY, C. M. **Nonlinear Programming: Theory and Algorithms**. 3rd. ed. Wiley-Interscience, John Wiley & Sons Inc., Hoboken, New Jersey, 2006. 853p.
- LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1990. 738 p.
- LUENBERGER, D. D.; YE, Y. **Linear and Nonlinear Programming**. 3rd. ed. California: Springer, 2007. 546 p.
- VICENTE, A.; CAMICIA, R. G. M. **Um Processo Não Determinístico Natural para Otimização**. Synergismus Scyentifica, UTFPR, v. 4, n. 2, 2009.
- VICENTE, A.; RIZZI, R. L.; RIZZI, C. B. **O Algoritmo Árvore da Montanha com o Auxílio de Buscas Unidirecionais**. Anais da XXVIII SAM, 2009.

Aplicações da Álgebra Linear nas Ciências Econômicas: a matriz de insumo-produto

Kaio Arlei Strelow¹

Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste) - Campus de Cascavel
kaio.strelow@unioeste.br

Fabiana Magda Garcia Papani

Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste) - Campus de Cascavel
fgarciapapani@gmail.com

Resumo: Dominar conceitos de Matemática, desde os mais básicos até os mais elaborados, é fundamental para capacitar o economista à análise de fenômenos socioeconômicos. Por meio de ferramentas de Álgebra Linear, é possível criar modelos para estudar certas situações econômicas: para analisar o nível de produção de uma nação, considerando aspectos como a tecnologia de cada firma, a inter-relação entre empresas e a demanda pelos produtos gerados é possível utilizar uma matriz de insumo-produto. Assim sendo, neste artigo, produzido ao longo de pesquisa de iniciação científica, são apresentados conceitos da Álgebra Linear, com destaque a matriz diagonal dominante e sua inversa, para mostrar a aplicação destas no tratamento de problemas da área das Ciências Econômicas, através da matriz de insumo-produto.

Palavras-chave: Matriz Diagonal Dominante; Matriz Inversa; Matriz de Leontief.

1 Introdução

Com o passar dos séculos, a vontade e necessidade do ser humano de organizar informações e analisá-las cresceu. Tabelas e quadros foram desenvolvidos para dispor números, parâmetros ou variáveis, em m linhas e n colunas. Tais arranjos de informações são denominados matrizes e, ao serem estudados pela Matemática, tiveram várias propriedades descobertas, possibilitando análises apuradas e aplicações em diversas áreas do conhecimento, como na Economia.

As Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Ciências Econômicas estabelecem que o Bacharel desta área deve apresentar, dentre outras coisas, a habilidade de “utilizar formulações matemáticas e estatísticas na análise dos fenômenos socioeconômicos” (CONSELHO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 2007). Dentre essas formulações, está a Álgebra Linear, que possibilita ao economista a) escrever um sistema de equações, mesmo que muito grande; b) testar existência de uma solução pelo determinante e; c) achar a solução para o sistema. Ainda, tal instrumento matemático é utilizado na análise estática, na análise comparativa estática e dinâmica, bem como nos problemas de otimização (CHIANG; WAINWRIGHT, 2006).

¹Bolsista do CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, através do Programa de Iniciação Científica e Mestrado - PICME/OBMEP.

Historicamente, o uso da Álgebra Linear na economia remete à contribuição do economista russo Wassily Leontief, laureado com o Prêmio de Ciências Econômicas em Memória de Alfred Nobel em 1973, por ser o primeiro a utilizar uma representação matricial para uma economia nacional. Na matriz em questão, conhecida como modelo insumo-produto, cada elemento indica quanto da produção de um setor serve de insumo para fabricação de um produto de outro setor (ou do próprio), mostrando a interdependência entre os ramos econômicos, isto é, a relação fornecedor-consumidor.

Desta forma, propõe-se neste artigo apresentar conceitos básicos de Álgebra Linear, indispensáveis para um entendimento adequado da literatura econômica corrente. Além disso, pretende-se aplicar as ferramentas matemáticas estudadas para resolver problemas ligados a fenômenos econômicos, através da matriz de insumo-produto, com o objetivo de salientar a relevância da Matemática para a Economia.

Para tanto, divide-se este trabalho em quatro partes, incluindo esta introdução. Na segunda seção, caracterizam-se: as matrizes, especificamente a matriz quadrada e as suas propriedades; a matriz diagonal dominante e sua inversa; e um sistema de equações lineares e as relações com matrizes. Em seguida, a matriz de insumo-produto e sua construção pautada nos conceitos antes abordados, trazendo também um exemplo. Ao final, são apresentadas as considerações finais do estudo realizadas até o momento.

2 Definições e resultados

A seguir, serão listados alguns resultados e definições importantes da Álgebra Linear, necessários para o desenvolvimento teórico do assunto pesquisado, com base em Boldrini et al.(1980), Chiang; Wainwright (2006) e Simon; Blume (1994).

2.1 Matrizes

Uma matriz $A_{m \times n}$ é um arranjo retangular de números, variáveis ou parâmetros em que há m linhas e n colunas. Os membros a_{ij} do arranjo são denominados *elementos e/ou termos* da matriz, em que o primeiro índice indica a linha e o segundo a coluna às quais pertence o elemento. Tal arranjo é usualmente escrito entre colchetes ou parênteses. Uma matriz $A=[a_{ij}]$ de ordem $m \times n$ é representada da seguinte forma:

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Definição 1. (Matriz quadrada) Diz-se que uma matriz $A=[a_{ij}]$ de ordem $m \times n$ é quadrada se $m=n$, isto é, se possui o mesmo número de colunas e linhas e, neste caso, à matriz A simplesmente se denomina de ordem n .

Definição 2. (Coluna) Diz-se que $A=[a_{ij}]$ de ordem $m \times 1$ é uma matriz coluna, representada por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Definição 3. (Linha) Diz-se que $A=[a_{ij}]$ de ordem $1 \times n$ é uma matriz linha, representada por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}.$$

Geralmente, a matriz coluna é denominada vetor coluna e uma matriz linha é denominada vetor linha. Ademais, considera-se **escalar** $\alpha \in \mathbb{R}$ como uma matriz de ordem 1×1 .

Definição 4. (Matriz triangular) Se uma matriz quadrada tem $a_{ij} = 0$ para $i > j$, isto é, os elementos abaixo da diagonal são iguais a 0, diz-se que esta matriz é **triangular superior**. Já se a matriz quadrada tem $a_{ij} = 0$ para $i < j$, isto é, os elementos acima da diagonal são iguais a 0, diz-se que esta matriz é **triangular inferior**.

$$S_{n \times n} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix} \quad D_{n \times n} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}.$$

Definição 5. (Matriz Diagonal) Diz-se que $A_{n \times n} = [a_{ij}]$ é uma matriz diagonal se $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$, isto é, uma matriz quadrada em que os elementos fora da diagonal são iguais a 0, representada por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Definição 6. (Igualdade entre matrizes) Sejam duas matrizes, $A_{m \times n}$ e $B_{m \times n}$; diz-se que estas matrizes são iguais, isto é, $A=B$, se $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i \in 1, 2, \dots, m$ e $j \in 1, 2, \dots, n$.

Definição 7. (Adição de matrizes) Sejam duas matrizes, $A_{m \times n}$ e $B_{m \times n}$. A soma destas resulta em uma nova matriz $C_{m \times n}$, cuja a ij -ésima entrada é a soma das ij -ésimas entradas das matrizes somadas.

$$A+B = C = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & b_{ij} & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & a_{ij} + b_{ij} & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Proposição 8. A matriz nula $0_{m \times n}$, com todas as entradas iguais a 0, é uma identidade aditiva, pois $A+0=A$, para todas matrizes $A_{m \times n}$.

Proposição 9. A subtração de matrizes é análoga à adição: Sendo $-A$ a matriz que somada a A para obter 0, tem-se que $A-A$ é só uma maneira abreviada de se escrever $A+(-A)$. Assim, a subtração de matrizes de mesmo tamanho é dada pela subtração das entradas correspondentes.

Definição 10. (Multiplicação de matriz por escalar) Seja um escalar $k \in \mathbb{R}$ e $A_{m \times n}$ uma matriz. A multiplicação da matriz pelo escalar, kA , é dada pela multiplicação de cada entrada de A por k .

$$k \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & \dots & ka_{1n} \\ \vdots & ka_{ij} & \vdots \\ ka_{m1} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}.$$

Definição 11. (Multiplicação matricial) A multiplicação de duas matrizes A e B está definida se, e somente se, número de colunas de A for igual ao número de linhas de B. Sendo $A_{k \times m}$ e $B_{m \times n}$, cada entrada do produto $AB = C_{k \times n}$ é obtida pela multiplicação da i -ésima linha de A pela j -ésima coluna de B:

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj} = \sum_{h=1}^m a_{ih}b_{hj}.$$

Proposição 12. Se a ordem das matrizes torna o produto matricial possível, valem as seguintes propriedades, demonstradas através da própria definição da operação:

- $A(B+C) = AB + AC$
- $(A+B)C = AC + BC$
- $(AB)C = A(BC)$
- $(aA)B = A(aB) = a(AB) \quad \forall a \in \mathbb{R}.$

Proposição 13. (Matriz Identidade) A matriz $I_{n \times n}$, com $a_{ii} = 1$ para todo i e $a_{ij} = 0$ para quaisquer $i \neq j$ é uma matriz diagonal especial: para uma matriz $A_{m \times n}$, $AI = A$ e para uma matriz $B_{n \times p}$, $IB = B$.

Definição 14. Seja A uma matriz de tamanho $k \times n$. A matriz $B_{n \times k}$ é **inversa à direita** de A se $AB = I$. A matriz $C_{n \times k}$ é uma **inversa à esquerda** de A se $CA = I$.

Definição 15. Seja A uma matriz quadrada de ordem n . Uma matriz B de ordem n é uma inversa de A se $AB = BA = I$. Se B existe, A é invertível e B é denotada por A^{-1} .

Proposição 16. Se uma matriz A, quadrada e de ordem n , tem uma inversa à direita B e uma inversa à esquerda C, então A é invertível e $B = C = A^{-1}$.

Prova. Por suposição, B e C são, respectivamente, inversas à direita e à esquerda de A. Então $C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B$. □

Proposição 17. A inversa de uma matriz é única.

Prova. Suponhamos que existem duas matrizes inversas para a matriz A; digamos B e C. Assim, $C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B$. □

2.2 Sistemas Lineares

A modelagem de muitos problemas das ciências reduz-se ao estudo de sistema de equações que, muitas vezes, são lineares. A seguir, apresenta-se as definições sobre tais equações, objetos de estudo da Álgebra Linear.

Definição 18. (Equação Linear) Uma equação linear é definida como toda equação do tipo $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ em que $x_1, x_2, \dots, x_n$ são **incógnitas** ou **variáveis**; os números reais $a_1, a_2, \dots, a_n$ são **coeficientes** ou **parâmetros** das incógnitas; e b , real, é o termo independente. A solução de uma equação linear é toda n-upla ordenada de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ que torna a igualdade $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n = b$ verdadeira.

Definição 19. (Sistema de Equações Lineares) Diz-se que um sistema S de equações lineares de m equações com n incógnitas é um conjunto de equações lineares do tipo:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots + \vdots + \dots + \vdots = \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}.$$

em que x_i são as incógnitas; os números reais a_{ij} , $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$ são coeficientes das incógnitas; e b_i , $0 \leq i \leq m$, são os termos independentes. Por sua vez, a solução de um sistema linear será a n-upla que satisfaz simultaneamente todas as equações deste sistema.

Um sistema também pode ser escrito na forma matricial, na forma $AX=B$, em que A é a matriz de coeficientes, X é o vetor de variáveis e B é o vetor de termos independentes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

No estudo de sistemas lineares, é recorrente determinar se há soluções; se sim, quantas e, ainda, como calculá-las. Algoritmos comuns para resolução desses sistemas são a substituição, a eliminação de variáveis e o uso de métodos matriciais, tais como o método da eliminação gaussiana.

Através do método de eliminação gaussiana, são efetuadas operações elementares sobre as equações, isto é, soma-se um múltiplo de uma equação a uma outra; multiplica-se ambos os lados de uma equação por um escalar não-nulo; e/ou permuta-se duas equações. O sistema transformado por essas operações terá o mesmo conjunto de solução e são chamados de *sistemas equivalentes*.

Similarmente, pode-se escrever uma matriz $\hat{A}$ ou $[A \mid B]$, denominada matriz aumentada, que nada mais é a coluna de termos independentes anexada à matriz de coeficientes, geralmente escrita com uma linha vertical entre as duas matrizes originais. Sobre essa matriz aumentada,

efetua-se as mesmas operações elementares, buscando encontrar uma matriz na forma escada (escalonada) por linhas, isto é, em que cada linha tem mais zeros nas suas primeiras entradas que a linha que a precede, o que facilita encontrar o conjunto solução para o sistema.

Definição 20. Diz-se que o posto de uma matriz é o número de linhas não-nulas em sua forma escalonada por linhas.

Proposição 21. *Um sistema de equações lineares com matriz de coeficientes A e matriz aumentada $\hat{A}$ possui uma solução se, e somente se, $\text{posto}\hat{A}=\text{posto}A$.*

Proposição 22. *Uma matriz de coeficientes A é não-singular, ou seja, o sistema de equações lineares a ela correspondente tem uma, e só uma, solução para cada vetor B se, e somente se, o posto de A for igual ao número de colunas de A , isto é, o número de variáveis do sistema.*

Proposição 23. *Se uma matriz $A_{n \times n}$ é invertível, a única solução do sistema de equações lineares $AX=B$ é $X=A^{-1}B$.*

Prova. Se A é invertível, é possível resolver um sistema de equações do tipo $AX=B$ multiplicando cada lado do sistema por A^{-1} . $AX = B \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow IX = A^{-1}B \therefore X = A^{-1}B$. $\square$

Definição 24. (Matriz não-singular) Diz-se que uma matriz não-singular é uma matriz quadrada cujo posto é igual ao número de suas linhas. Assim, quando uma matriz não-singular surge como a matriz de coeficientes de um sistema de equações lineares, o sistema terá uma, e só uma, solução.

Proposição 25. *Se $A_{n \times n}$ é não-singular, então A é invertível.*

2.3 Matriz diagonal dominante e sua inversa

Definição 26. (Matriz Diagonal Dominante) Uma matriz quadrada diagonal dominante é aquela que satisfaz às seguintes propriedades: (a) cada entrada fora da diagonal é não-positiva; (b) cada entrada da diagonal é positiva; e (c) a soma das entradas em cada coluna é positiva

Alternativamente, diz-se que esta matriz requer que o valor absoluto da entrada diagonal seja pelo menos tão grande quanto a soma dos valores absolutos das outras entradas naquela coluna.

Lema 27. *Seja B uma matriz diagonal dominante. Então, o vetor-solução do sistema $BX=D$, sendo D um vetor com todas as entradas não-negativas, possui todas as entradas não-negativas.*

Prova. Tomar-se-á uma matriz $B_{3 \times 3}$, sem perda de generalidade para matrizes diagonais dominantes de ordens distintas. Seja

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & -b_{12} & -b_{13} \\ -b_{21} & b_{22} & -b_{23} \\ -b_{31} & -b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

em que $b_{ii} > 0$; $b_{ij} \geq 0$ se $i \neq j$; e $0 \leq \sum_{h \neq j} b_{hj} < b_{jj} \forall 1 \leq i, j \leq 3$. Através do processo de escalonamento (eliminação gaussiana) da matriz aumentada $[B|D]$, tem-se:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} b_{11} & -b_{12} & -b_{13} & d_1 \\ -b_{21} & b_{22} & -b_{23} & d_2 \\ -b_{31} & -b_{32} & b_{33} & d_3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} b_{11} & -b_{12} & -b_{13} & d_1 \\ 0 & b_{22} - \frac{b_{21}}{b_{11}}b_{12} & -b_{23} - \frac{b_{21}}{b_{11}}b_{13} & d_2 - \frac{b_{21}}{b_{11}}d_1 \\ 0 & -b_{32} - \frac{b_{31}}{b_{11}}b_{12} & b_{33} - \frac{b_{31}}{b_{11}}b_{13} & d_3 - \frac{b_{31}}{b_{11}}d_1 \end{array} \right]$$

$$\equiv \left[\begin{array}{cc|c} b_{11} & -\mathbf{b} & d_1 \\ \mathbf{0} & B' & \mathbf{d} \end{array} \right].$$

A matriz B' de ordem $(n-1) \times (n-1)$ ainda é diagonal dominante, pois as entradas fora da diagonal são não-positivas, as entradas da diagonal são positivas e a soma dos valores absolutos das entradas fora da diagonal são menores que o valor da diagonal. Isso ocorre pois o valor original da diagonal é maior que a soma dos demais e, no processo de eliminação gaussiana, foi subtraída uma fração menor de cada entrada, mantendo o valor da diagonal maior que a soma dos demais elementos da coluna. Ao final, a forma escada da matriz tem o seguinte padrão, sendo que - indica entradas não-positivas, + indica entradas positivas e +* indica entradas não-negativas:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} + & - & - & +* \\ 0 & + & - & +* \\ 0 & 0 & + & +* \end{array} \right].$$

Como o posto da matriz resultante da eliminação gaussiana é igual ao número de variáveis, o sistema tem uma, e só uma solução, e a inversa de B existe. Resolvendo o sistema, temos

$$b'_{33}x_3 = d'_3 \Rightarrow x_3 = \frac{d'_3}{b'_{33}}.$$

Como d'_3 é não-negativo e b'_{33} é positivo, tem-se que $x_3 \geq 0$. Segue que:

$$b'_{22}x_2 - b'_{23}x_3 = d'_2 \Rightarrow x_2 = \frac{d'_2 + b'_{23}x_3}{b'_{22}} \geq 0;$$

$$b'_{11}x_1 - b'_{12}x_2 - b'_{13}x_3 = d'_1 \Rightarrow x_1 = \frac{d'_1 + b'_{12}x_2 + b'_{13}x_3}{b'_{11}} \geq 0.$$

Logo, os elementos do vetor X são todos não-negativos. $\square$

Observação 1. Analogamente, para matrizes de ordem n , as matrizes de ordem $n-p$ (tal que $p \leq n$) resultantes do escalonamento são diagonais dominantes.

Teorema 28. *Seja B uma matriz diagonal dominante. Então B^{-1} possui todas as entradas não-negativas.*

Prova. Sabe-se que $B \times B^{-1} = I$. Sendo $I_{3 \times 3} = [e_1, e_2, e_3]$ a matriz identidade (que por definição tem todos os elementos não-negativos) e $B^{-1} = [v_1, v_2, v_3]$, tem-se que $B \times v_1 = e_1$, $B \times v_2 = e_2$

e $B \times v_3 = e_3$, isto é, as colunas de B^{-1} são os vetores-solução de $BX = e_n$ e, portanto pelo lema anterior, os elementos de todas as colunas de B^{-1} são não-negativos. Portanto, a inversa de B tem todas as entradas não-negativas. $\square$

Corolário 29. *Seja A uma matriz de tamanho $n \times n$, tal que cada uma de suas entradas é não-negativa e a soma das entradas em cada coluna é menor do que 1. Então a matriz $(I - A)^{-1}$ existe e contém somente entradas não negativas.*

Prova. A matriz $-A$ tem todas as entradas e a soma das colunas entre -1 e 0 , então $I - A$ é uma matriz diagonal dominante, e pelo Teorema anterior, $(I - A)^{-1}$ existe e tem todas as entradas não-negativas. $\square$

3 Matriz de Insumo-Produto

O modelo de análise de insumo-produto do professor Wassily Leontief trata da seguinte pergunta: “Que nível de produto cada uma das n indústrias de uma economia deve produzir, de modo que seja exatamente suficiente para satisfazer a demanda total por aquele produto?”. Basicamente, há a busca pelo nível de equilíbrio (sem escassez nem excesso de oferta) (CHIANG; WAINWRIGHT, 2006). Por exemplo, o produto de uma empresa do setor energético é necessário como insumo de outras indústrias e até mesmo da própria. Assim, o nível de produção de energia dependerá do consumo dessas n indústrias. Ademais, os produtos dessas n indústrias entrarão nessa usina energética como insumos e, logo, o nível correto de produção dessas n indústrias dependerão também do consumo da usina.

3.1 Construção do modelo

Entende-se, por *níveis corretos de produção*, aqueles que satisfazem relações técnicas de insumo-produto, sendo que o problema proposto para análise se traduz em resolver um sistema de equações simultâneas e, assim, a Álgebra Linear torna-se muito útil.

Por simplificação, são adotadas as seguintes premissas: (1) cada indústria produz somente uma mercadoria, homogênea; (2) cada indústria utiliza uma combinação fixa de fatores para a produção; (3) a produção de cada uma das indústrias está sujeita a retornos constantes de escala, de modo que uma mudança de δ vezes em cada insumo resultará em uma mudança de exatamente δ vezes no produto. Sobre essa terceira premissa, é importante trazer algumas definições: Segundo Pyndick e Rubinfeld (2014, p. 176), os rendimentos de escala se referem à “taxa de crescimento do produto à medida que os insumos crescem proporcionalmente e, assim, quando há rendimentos constantes de escala, o tamanho da empresa não influencia a produtividade de seus insumos”. Entende-se, pois, que a função de produção dessa indústria é linear.

Para produzir cada unidade de um bem j , a quantidade de insumo do bem i deve ser fixa, o que é denotado por a_{ij} (o primeiro índice se refere ao insumo e o segundo ao produto) e chamado **coeficiente de insumo-produto**.

Para uma economia de n indústrias, os coeficientes de insumos podem ser organizados em uma matriz $A_{n \times n} = [a_{ij}]$, denominada *matriz dos coeficientes técnicos* ou *matriz tecnológica* na qual cada coluna especifica os requisitos de insumos para a produção de uma unidade do produto de uma indústria em particular. Se nenhuma indústria utilizar seu próprio produto como insumo, então os elementos na diagonal principal da matriz A serão todos zero.

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Se as n indústrias representassem o total da economia, então seus produtos teriam o propósito apenas de atender à demanda dessas indústrias e não à demanda final. Não haveria também insumos primários, como a mão-de-obra. Assim, neste modelo é incluso um setor aberto, definido de forma exógena, que engloba as atividades domiciliares dos consumidores, do governo e do mercado externo.

Considerando tal setor, as colunas da matriz A , de insumos, deve ser menor que 1. Isso porque nesta matriz estão descritos os custos parciais dos insumos, sem os custos primários.

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} < 1, \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

Pode-se afirmar também que como o valor do produto deve ser absorvido pelo pagamento aos fatores de produção, a diferença entre a soma da coluna e 1 ($1 - \sum_{i=1}^n a_{ij}$) é equivalente ao valor dos insumos primários necessários para produzir uma unidade de mercadoria.

Então, para que a indústria I fabrique a quantidade de equilíbrio, seu nível de produção deve satisfazer à seguinte equação:

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + d_1.$$

em que d_1 denota a demanda final para o produto. Análogamente, pode-se definir as equações para as outras indústrias.

Transferindo aos termos com as variáveis x_j para esquerda da igualdade e deixando à direita somente as demandas finais determinadas exogenamente, d_j , os níveis de produção das indústrias são obtidos pela solução das equações:

$$S = \begin{cases} (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n = d_1 \\ -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 - \dots - a_{2n}x_n = d_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ -a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - \dots + (1 - a_{mn}x_n) = d_n \end{cases}.$$

Na forma matricial, podemos escrever este sistema como:

$$\begin{bmatrix} (1 - a_{11}) & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & (1 - a_{22}) & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & (1 - a_{nn}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}.$$

Assim, temos:

$$(I - A)X = D$$

onde X e D são, respectivamente, o vetor de variáveis e o vetor de demanda final (termo constante). A matriz $(I-A)$ é denominada *matriz de Leontief*. Como a matriz A é relativamente constante ao longo do tempo e vetor D varia frequentemente, com as flutuações da economia, é conveniente resolver o sistema a partir da equação

$$X^* = (I - A)^{-1}D.$$

Contanto que $I-A$ seja invertível, pode-se achar sua inversa $(I - A)^{-1}$ e obter a solução única do sistema. Além de exigir que a matriz $(I-A)$ seja invertível, é necessário que todas as soluções x_j^* sejam não negativas, pelo próprio bom senso econômico (não existe produção negativa). Mas isso não se dá automaticamente; só acontece quando a matriz de Leontief possui certas propriedades.

Como a matriz A , dos coeficientes técnicos tem todas as entradas não negativas e a soma das colunas é menor que 1, $-A$ tem as entradas e a soma das colunas entre 0 e -1. Assim, $I-A$ tem as entradas fora da diagonal não-positivas, as entradas da diagonal são positivas e a soma das entradas em cada uma das n colunas é positiva. Ora, esta é a definição de matriz diagonal dominante. Assim, pelo teorema 28, a inversa da matriz existe e tem todas as entradas não-negativas.

3.2 Um exemplo aplicado

A cada cinco anos, o IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) divulga a Matriz de Insumo-Produto, sendo que a mais recente é referente ao ano de 2015, sendo elaborada com base nas tabelas do Sistema de Contas Nacionais. Através delas, da análise dos fluxos intersetoriais e a relação com a demanda final, é possível estudar a estrutura produtiva do Brasil (BRASIL, 2016).

A forma mais simplificada da tabela apresenta doze setores, divididos conforme a metodologia internacionalmente usada pelos órgãos de pesquisa sobre as Contas Nacionais, com as devidas adaptações para a realidade brasileira. Adaptou-se, neste trabalho, uma matriz aproximada de insumo-produto com três grandes setores, para exemplificar o funcionamento do modelo:

Setor I: Engloba agropecuária; indústrias extrativa e de transformação; eletricidade e gás, água, esgoto e gestão de resíduos; e construção.

Setor II: Engloba comércio; transporte, armazenagem e correio; informação e comunicação; atividades financeiras, de seguros e serviços relacionados; e atividades imobiliárias;

Setor III: Engloba outras atividades de serviços; e administração, defesa, saúde e educação públicas e seguridade social.

Podemos escrever a matriz de coeficientes técnicos e o vetor de demanda final, sendo este em milhões de reais, como:

$$A \cong \begin{bmatrix} 0,369 & 0,050 & 0,033 \\ 0,186 & 0,153 & 0,067 \\ 0,072 & 0,091 & 0,054 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2395321 \\ 1725857 \\ 2013159 \end{bmatrix}.$$

Interpretando os elementos da matriz A, é possível perceber que o setor I demanda de seu próprio produto aproximadamente R\$0,37; demanda R\$0,19 do setor II e R\$ 0,07 do setor III para produzir R\$ 1,00 de seu produto. A soma da coluna é 0,627. Portanto, para cada um real produzido pelo setor I, R\$0,37 são destinados à remuneração de fatores primários, como a mão-de-obra.

Tendo A e D, a pergunta é: qual é o nível de produção de cada indústria para que haja equilíbrio entre a oferta e a demanda?

Primeiro, calculamos I-A:

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,369 & 0,050 & 0,033 \\ 0,186 & 0,153 & 0,067 \\ 0,072 & 0,091 & 0,054 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0,631 & -0,050 & -0,033 \\ -0,186 & 0,847 & -0,067 \\ -0,072 & -0,091 & 0,946 \end{bmatrix}.$$

O próximo passo é calcular a $(I - A)^{-1}$. Note que I-A é diagonal dominante. O resultado, aproximado para três casas decimais, é

$$(I - A)^{-1} \cong \begin{bmatrix} 1,622 & 0,103 & 0,064 \\ 0,369 & 1,213 & 0,99 \\ 0,159 & 0,124 & 1,071 \end{bmatrix}.$$

Observe que todas as entradas são positivas, consoante o teorema 28. Assim, quando a demanda de consumo é D, a produção total de cada setor deve ser, em milhões de reais:

$$\mathbf{X} = (I - A)^{-1} \cdot D \cong \begin{bmatrix} 1,622 & 0,103 & 0,064 \\ 0,369 & 1,213 & 0,99 \\ 0,159 & 0,124 & 1,071 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2395321 \\ 1725857 \\ 2013159 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 4.191.369,16 \\ 3.177.210,15 \\ 2.753.686,26 \end{bmatrix}.$$

Pode-se concluir, por exemplo, que é necessário um valor aproximado de 4,2 trilhões de reais de produtos do setor I; 3,2 trilhões de reais de produtos do setor II; e 2,8 trilhões de reais dos produtos do setor III para atender a demanda intermediária e final da economia. A produção total dessa economia deve ser de R\$10,122 trilhões, enquanto, segundo dados do IBGE (BRASIL, 2017) para 2015, a produção daquele ano foi de R\$ 10,226 trilhões, aproximadamente. Assim, pode-se perceber que o modelo de insumo-produto traz uma boa aproximação da realidade.

4 Considerações Finais

Ao longo deste artigo, foram explorados conteúdos de Álgebra Linear, no que se refere às matrizes e sistemas lineares, com destaque também à matriz diagonal dominante e sua inversa que, apesar de pouco conhecida, tem propriedades importantes para aplicações em outras áreas, como nas Ciências Econômicas.

Seguindo os objetivos propostos, o trabalho pôde apresentar a aplicação do conhecimento teórico abordado em um modelo linear de produção, conhecido como Matriz de Insumo-Produto, cujo significado e validade econômica pauta-se na existência da inversa da matriz de Leontief $[I-A]$ e do fato que todos os elementos dessa inversa são não-negativos. No exemplo para a economia brasileira, foi possível perceber que o modelo é funcional e tem a correspondência e coerência desejada para com o mundo real.

Referências

- BRASIL. IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Matriz de Insumo-Produto**. 2016. Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/estatisticas-novoportal/economicas/contas-nacionais/9085-matriz-de-insumo-produto.html> Acesso em: 16 jul. 2018.
- **Sistema de Contas Nacionais:** Tabela de Componentes do Produto Interno Bruto sob as três óticas, valores correntes e constantes e variação de volume, preço e valor - 2010-2015. 2017. Disponível em: ftp://ftp.ibge.gov.br/Contas_Nacionais/Sistema_de_Contas_Nacionais/2015/tabelas_xls/sinoticias/tab05.xls Acesso em: 16 jul. 2018.
- BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H. G. **Álgebra Linear**. São Paulo: Harbra, 1980.
- CHIANG, A. C. ; WAINWRIGHT, K. **Matemática para Economistas**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006.
- CONSELHO NACIONAL DE EDUCAÇÃO. Resolução nº 4, de 13 de julho de 2007. **Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Ciências Econômicas, bacharelado, e dá outras providências**. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/2007/rces004_07.pdf. Acesso em: 07 dez. 2017.
- PINDYCK, R.; RUBINFELD, D. **Microeconomia**. 8ª ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2014.
- SIMON, C.; BLUME, L. **Mathematics for economists**. New York: W. W. Norton e Company, Inc, 1994.

Resolução de problemas para o ensino de função afim

Ana Cristina Dellabetta Guerrero
Universidade Estadual do Oeste Paranaense
anacristinadellabetta@hotmail.com

Daniele Donel
Universidade Estadual do Oeste Paranaense
danidonel@hotmail.com

Resumo: O presente trabalho relata parte da experiência vivenciada com a prática de ensino supervisionada. Com foco na apresentação das atividades desenvolvidas em uma turma de ensino médio, para abordar o conteúdo de Função Afim, através da Tendência Resolução de Problemas. Buscou-se levar para a sala de aula situações problemas que proporcionem ao estudante uma aprendizagem de qualidade do conteúdo e permitam a visualização da importância dele para o cotidiano. Partimos de uma experimentação para obtenção da noção de função, e a partir desta, aprofundamos os estudos a respeito da temática, buscando sempre relacionar com o dia-a-dia dos alunos.

Palavras-chave: Experimento; material concreto; aplicação.

1 Introdução

Este trabalho tem o intuito de relatar parte da experiência vivenciada com a prática de ensino supervisionada, com foco na apresentação das atividades, desenvolvidas em uma turma de ensino médio, através da Tendência Resolução de Problemas. O conteúdo foi definido pela professora regente da turma, sendo função afim.

As atividades de estágio foram realizadas no Colégio Estadual Olinda Truffa de Carvalho, onde após a realização das observações, que são requisitos da disciplina, optamos por trabalhar com a turma do 1º ano C. Entramos em contato com a professora regente da turma, que nos informou que de acordo com o seu cronograma, estaria no período planejado para aplicação as aulas do estágio, no assunto de funções e, portanto, deveríamos aplicar o projeto de ensino da regência direcionado a este conteúdo. O estágio compreendeu várias atividades, que foram e estão sendo desenvolvidas durante o ano de 2018, a prática de docência foi realizada entre os dias quinze de maio e três de julho de 2018, totalizando 18 horas-aulas.

Observamos que sempre os mesmos estudantes estavam concentrados nas aulas, enquanto que havia uma prevalência de alunos que demonstram desinteresse pela matéria, inclusive, muitos deles faltavam demasiadamente às aulas. Em vários momentos houve conversas paralelas entre os alunos, embora tivéssemos uma boa liderança na turma. Notamos que os estudantes não eram acostumados a resolver problemas, sempre que propúnhamos algo, eles dispersavam ou só avançavam quando explicávamos individualmente. Tentamos cativar o interesse dos estudantes para o assunto abordado, através de questionamentos. Quando estávamos à frente,

resolvendo as questões no quadro, os estudantes participavam, realmente prestavam atenção e faziam perguntas. Acreditamos que esses momentos foram os mais proveitosos.

2 O ensino da Matemática

A Matemática, desde os povos da antiguidade, é uma disciplina central nos sistemas de educação, vista como completa e incontestável (D'AMBRÓSIO, 1990), conceito que é arrastado de geração para geração e acaba dificultando o ensino da Matemática. Ela é concebida como algo pronto e acabado, que em geral não possui relação entre a maneira que é ensinada nas escolas e sua utilidade.

Uma implicação visível deste cenário é a falta de interesse dos estudantes em relação à Matemática. Geralmente os professores de Matemática são indagados, por seus alunos, em relação a utilização daquela Matemática, vista em sala de aula, no seu dia-a-dia. Nota-se, inclusive, que muitos professores levam problemas desvinculados da realidade, para a sala de aula, ocasionando um maior distanciamento da Matemática presente no cotidiano dos alunos com a vista em sala de aula.

O ensino de matemática se faz, tradicionalmente, sem referência ao que os alunos já sabem. Apesar de todos reconhecermos que os alunos podem aprender sem que o façam na sala de aula, tratamos nossos alunos como se nada soubessem sobre tópicos ainda não ensinados. (CARRAHER et al. 1993, p.21).

É essencial que os alunos percebam a importância, para a sociedade, dos conteúdos matemáticos que lhes são ensinados na escola, mas isso só é possível com o desenvolvimento de um trabalho contextualizado, que auxilia também a visualização da relação entre a Matemática e outras disciplinas escolares. Dessa maneira o docente precisa guiar seu trabalho com base em uma Matemática onde sejam valorizados, na escola, os conhecimentos agregados pelos estudantes no seu cotidiano. Uma das maneiras de redirecionar a abordagem dos conteúdos matemáticos é a busca por metodologias que valorizem a ocorrência de aprendizagem significativa (MARIANO, 2012).

Recorremos, então, às Tendências em Educação Matemática, com o intuito de proporcionar um ensino mais significativo aos estudantes. Assim como afirmamos em Dellabetta et al. (2016, p.30):

Acredita-se que uma proposta metodológica, fundamentada nas Tendências em Educação Matemática possibilite uma melhor compreensão e torne a construção do conhecimento matemático mais significativo e seja capaz de tornar a matemática uma disciplina agradável, fácil de aprender e de ser ensinada.

É preciso frisar que encontra-se exatamente essas recomendações nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica (DCE), da disciplina de Matemática, afirmando a importância da utilização das Tendências em Educação Matemática na elaboração de um trabalho diferente.

Na Educação Básica, o aluno deve compreender que as Funções estão presentes nas diversas áreas do conhecimento e modelam matematicamente situações que, pela resolução de problemas, auxiliam o homem em suas atividades. As Funções devem ser vistas como construção histórica e dinâmica, capaz de provocar mobilidade às explorações matemáticas, por conta da variabilidade e da possibilidade de análise do seu objeto de estudo e por sua atuação em outros conteúdos específicos da Matemática. (PARANÁ, 2008, p.59).

Pensando no ensino de Função Afim, baseadas nas Tendências em Educação Matemática, buscou-se levar para a sala de aula situações problemas que proporcionem ao estudante a aprendizagem significativa do conteúdo e permitam a visualização da importância dele para o cotidiano.

3 Função Afim

A concepção atual de função evoluiu no decorrer dos anos e teve a participação de diversos matemáticos. O conceito apresenta vestígios desde a antiguidade, pelos babilônicos, que utilizavam tabelas para solucionar seus problemas. O conceito era tratado de forma simples, sem ser definido.

A partir de então, houve uma construção, aos poucos, deste conceito. Gottfried Leibniz (1646 - 1716), no século XVIII, usou pela primeira vez o termo função, mas a definição de função foi concebida por Leonard Euler (1707 - 1783) que escreveu "Se x é uma quantidade variável, então toda a quantidade que depende de x de qualquer maneira, ou que seja determinada por aquela, chama-se função da dita variável", sendo que criou também a notação $f(x)$. Bernoulli mostrou a definição do conceito de função como expressão analítica no ano de 1718, e em 1829, Peter Dirichlet trouxe um sentido mais abrangente para função, considerando a função com y sendo a variável dependente, com os valores fixos ou determinados por uma regra que tem seus valores dependendo dos valores atribuídos à x que é a variável independente.

Segundo os PCN(1999), esse tema, se ensinado de maneira isolada, colabora para ocultar a integralidade que possui.

Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. (BRASIL, 1999, p.255).

O estudo de funções deve ser reforçado no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, bem como na interpretação de gráficos e nas aplicações dessas funções, pois, este conteúdo está fortemente presente em nosso cotidiano, visto que é o conteúdo com maior aplicação, tanto na Matemática como em outras áreas do conhecimento. Conforme Ponte (1990), as funções servem para estudar problemas com variações e são imprescindíveis para o

estudo qualitativo relacionado a fenômenos naturais, e ainda afirma que "o conceito de função é justamente considerado um dos mais importantes de toda a Matemática" (PONTE, 1990, p.03).

As Orientações Curriculares que complementam os Parâmetros Curriculares Nacionais trazem que:

Tradicionalmente o ensino de funções estabelece como pré-requisito o estudo dos números reais e de conjuntos e suas operações, para depois definir relações e a partir daí identificar as funções como particulares relações. Todo esse percurso é, então, abandonado assim que a definição de função é estabelecida, pois para a análise dos diferentes tipos de funções todo o estudo relativo a conjuntos e relações é desnecessário. Assim, o ensino pode ser iniciado diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, o que permite o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente (BRASIL, 2006, p.121).

As atividades de estágio foram realizadas no Colégio Estadual Olinda Truffa de Carvalho. Após o período de observação, entramos em contato com a professora regente da turma do 1º ano C, que nos informou que de acordo com o seu cronograma, estaria no período planejado para aplicação as aulas do estágio, no assunto de funções e, portanto, deveríamos aplicar o projeto de ensino da regência direcionado a este conteúdo. Então, partimos de uma experimentação para obtenção da noção de função, e a partir desta, aprofundamos os estudos a respeito da temática, buscando sempre relacionar com o dia-a-dia dos alunos.

4 Resolução de Problemas para o ensino de Função Afim

Dentre as atividades realizadas, a que apresentou um melhor envolvimento e respectivo rendimento por parte dos estudantes, foi um experimento, realizado no primeiro dia da regência, intitulado "Observando o nível de água em um copo". Para o qual dividimos a turma em grupos de quatro integrantes. Foram entregues para cada grupo um copo aparentemente cilíndrico, várias bolinhas de gude (todas do mesmo tamanho), uma garrafa com água, guardanapo, uma seringa e uma régua (Figura 1), juntamente com um roteiro e um quadro a ser completado individualmente. Solicitamos que os estudantes enchessem o copo com água até atingir uma altura de 10 cm. Em seguida, que acrescentassem uma a uma as bolinhas de gude no copo com água (Figura 2) e anotassem no quadro (que foi entregue impresso) o nível da água.



Figura 1: Alguns dos materiais disponibilizados aos estudantes.
Fonte: Acervo das autoras.

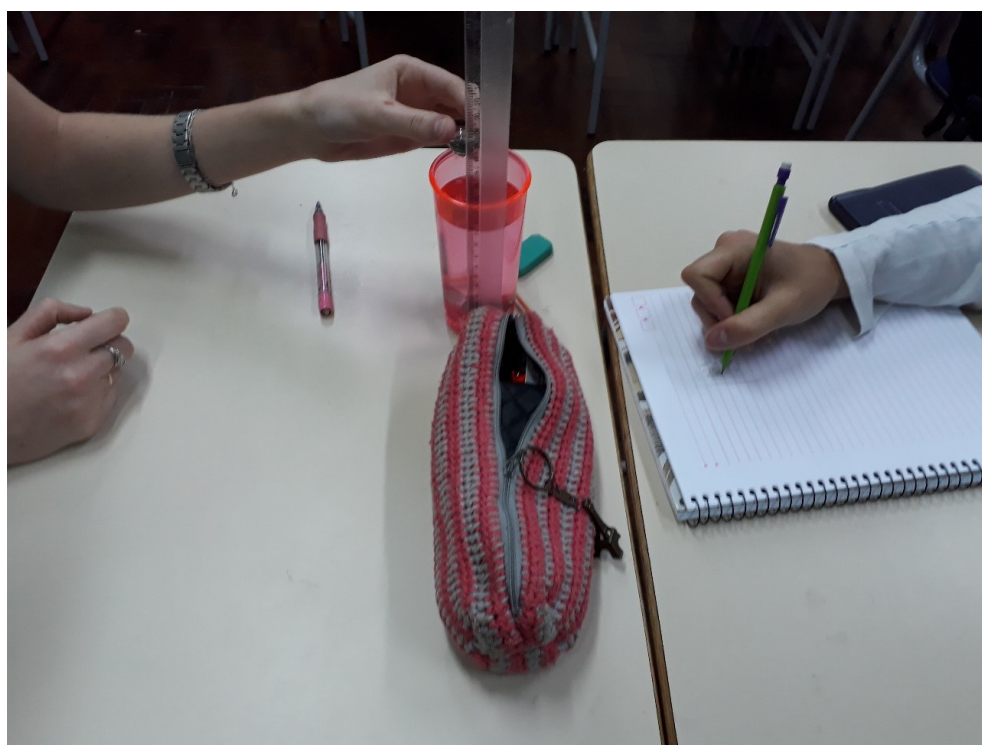


Figura 2: Estudantes realizando o experimento.
Fonte: Acervo das autoras.

O intuito da experimentação é que os estudantes observem que uma das grandezas (nível da água) tem sua variação condicionada à outra (número de bolinhas de gude colocadas), e que isso pode ser expresso por meio de uma função. Então, conduzimos a experiência com as seguintes indagações, que também foram entregues impressas para cada aluno:

- a) Se colocarmos uma bolinha de gude no copo com água, que altura o grupo acha que o nível da água chegará. Anote esta estimativa no Quadro 1.

Resposta pessoal.

- b) Agora faça o experimento com uma bolinha, verifique o nível da água (altura que a água atinge) e anote no Quadro 1.

Resposta: O nível da água chegará em 10,1 cm.

- c) Sem realizar o experimento, estime a altura que terá a água se colocarmos duas bolinhas no copo. E se colocarmos três bolinhas? Anote suas estimativas no Quadro 1.

Resposta pessoal.

- d) Agora, realize o experimento com duas e três bolinhas.

Resposta: Com duas bolinhas o nível da água chegará em 10,2 cm e com três bolinhas o nível da água chegará em 10,3 cm.

- e) À medida que acrescentamos bolinhas, o que acontece com a altura da água no copo?

Resposta: A altura aumenta em 0,1 cm para cada bolinha colocada.

- f) Conversando com os colegas de seu grupo, tentem estimar a altura da água no copo se colocarmos quatro, cinco e seis bolinhas.

Resposta pessoal.

- g) Agora confira os resultados das suas estimativas, realizando o experimento com quatro, cinco e seis bolinhas, anotando os dados no Quadro 1.

Resposta: Com quatro bolinhas o nível da água chegará em 10,4 cm, com cinco bolinhas chegará em 10,5 cm e com seis bolinhas chegará em 10,6 cm.

- h) Conversando com os colegas de seu grupo, tente descobrir a altura da água no copo se colocarmos sete, oito, nove e dez bolinhas.

Resposta pessoal.

- i) Realizando o experimento, preencha o quadro, adicionando 7, 8, 9 e 10 bolinhas no copo.

Resposta: Com sete bolinhas o nível da água chegará em 10,7 cm, com oito bolinhas 10,8 cm, com nove bolinhas 10,9 e com dez chegará em 11 cm.

- j) Existe relação entre o nível que a água atinge no copo e o número de bolinhas que foram colocadas no copo? Se possível, expresse esta relação.

Resposta: A altura (h) é igual a 10 mais ao número de bolinhas (n) vezes 0,1, ($h = 10 + n \cdot 0,1$).

Concluimos este momento com um desafio, que motivou os estudantes.

Desafio: Quantas bolas de gude são necessárias para que a água do copo transborde?

Número de bolinhas	Estimativa do nível de água no copo	Nível da água no copo (após o experimento)
1	Resposta pessoal	10,1 cm
2	Resposta pessoal	10,2 cm
3	Resposta pessoal	10,3 cm
4	Resposta pessoal	10,4 cm
5	Resposta pessoal	10,5 cm
6	Resposta pessoal	10,6 cm
7	Resposta pessoal	10,7 cm
8	Resposta pessoal	10,8 cm
9	Resposta pessoal	10,9 cm
10	Resposta pessoal	11 cm

Tabela 1: Experimento bolas de gude.

Fonte: Acervo das autoras.

Concluímos a atividade com a socialização dos resultados obtidos e registrando essas observações na lousa, completando o Quadro 1.

Em seguida, definimos função:

Dados dois conjuntos não vazios, A e B , uma função de A em B é uma regra que indica como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$.

Enquanto os estudantes realizavam o experimento e registravam seus resultados, sanamos as dúvidas e os auxiliamos. Notamos uma dificuldade dos alunos em reconhecer 10,15 cm na régua, o argumento era de que não havia marcação para esse valor. Assim, arredondavam o valor para a próxima marcação.

No geral, os estudantes não apresentaram dificuldade em realizar o experimento e nem em registrar os resultados no Quadro 1. Porém, no item do roteiro que solicitava a elaboração de uma expressão de relação entre o nível de água do copo e o número de bolinhas, houve uma dificuldade de interpretação por parte dos alunos. Ao conversarmos, nos grupos, sobre qual seria a relação, eles compreenderam que deveria ser uma equação, assim, observaram os resultados obtidos e expressaram a relação.

Na aula seguinte, construímos no quadro, com auxílio dos estudantes, o gráfico da função obtida no experimento, reforçando todos os conceitos envolvidos na construção. Neste momento, percebeu-se que a aula havia sido produtiva e que os alunos realmente haviam compreendido os conceitos básicos de função afim.

De acordo com Rodrigues e Gazire (2012, p.187):

Os materiais didáticos manipuláveis (MD) constituem um importante recurso didático a serviço do professor em sala de aula. Estes materiais podem tornar as aulas de matemática mais dinâmicas e compreensíveis, uma vez que permitem a aproximação da teoria matemática da constatação na prática, por meio da ação manipulativa.

5 Considerações finais

Constatou-se, mais uma vez, que é necessário levar, para a sala de aula, atividades que cativem o interesse dos estudantes, uma das possibilidades é com a utilização de material manipulável e realização de experimentos, assim como procedemos nesta turma em que relatamos, no presente trabalho, a prática docente do estágio.

O desenvolvimento desse estágio proporcionou espaço para refletir, questionar e adequar nossas concepções a respeito do ensino da matemática, bem como da realidade que vivenciamos nas escolas. Pode-se, também, compreender as dificuldades que os professores passam em sala de aula, lidar com estudantes desinteressados, que não queriam estar na sala de aula, ou que não se propõem a aprender porque sabem que receberão nota posteriormente e serão aprovados, é muito desmotivador para o educador.

Nós como docentes, devemos ser maleáveis a mudanças. Devemos estar preparados para lidar com as situações que podem ocorrer em cada aula e termos um planejamento flexível, pois em determinados momentos, as coisas podem não sair como planejamos. É indispensável que o educador seja criativo, e procure maneiras que possam contornar a ocasião, propiciando ao discente o desenvolvimento de todos os assuntos previstos para aquele ano, buscando esclarecer as dúvidas que aparecem no andamento das aulas e oportunizando aos estudantes uma aprendizagem relevante e satisfatória. Está cada vez mais difícil encontrar maneiras que façam com que os alunos participem ativamente das aulas. Entretanto, foi uma experiência muito significativa para nossa formação inicial. Neste sentido, orienta-se que os docentes utilizem novas metodologias e estratégias, para cativar o interesse dos estudantes e mostrar a eles a importância da Matemática em suas vidas.

Referências

- BRASIL. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):** Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, 1999.
- BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**, v. 2. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, 2006.
- CARRAHER, Terezinha; CARRAHER, David; SCHLIEMANN, Ana Lúcia. **Na Vida Dez, Na Escola Zero**. 7. ed. São Paulo: Cortez, 1993.
- D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Etnomatemática**. São Paulo: Ática, 1990.
- DELLABETTA, Ana Cristina et al. As tendências em educação matemática e suas relações. In: XXX Semana Acadêmica da Matemática, 2016, Cascavel. **Anais...** . Cascavel: Sbm, 2016. p. 29 - 37.

- MARIANO, Vera Alice. **Função Afim e o Movimento Retilíneo Uniforme**: uma abordagem interdisciplinar. In: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. O professor PDE e os desafios da escola pública paranaense: produção didático-pedagógica, 2012. Curitiba: SEED/PR., 2014. V.2. (Cadernos PDE). Disponível em: www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=20. Acesso em: 15 jul. 2018. ISBN 978-85-8015-064-3.
- PARANÁ, **Diretrizes Curriculares da Educação Básica - Matemática**. Curitiba: SEED, 2008.
- PONTE, João Pedro. O conceito de função no currículo de Matemática. **Revista Educação e Matemática**, APM, Portugal, n.15, p. 3-9, 1990.
- RODRIGUES, Fredy Coelho; GAZIRE, Eliane Scheid. Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão. **REVEMAT**. Florianópolis (SC), v. 7, n. 2, p. 187-196, 2012.

Unicidade da decomposição cíclica

Alexandre Batista de Souza
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
aledaron@gmail.com

Flavio Roberto Dias Silva
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
frdsilva@yahoo.com.br

Resumo: Apresentamos aqui o teorema de unicidade para a decomposição cíclica de um espaço vetorial de dimensão finita. Mais especificamente mostramos que se há duas decomposições cíclicas para um espaço vetorial então tais decomposições tem o mesmo número de parcelas as quais duas a duas tem a mesma dimensão, a menos de reordenamento dos vetores da base.

Palavras-chave: Decomposição primária; Decomposição cíclica; Unicidade.

1 Introdução

Este trabalho percorre alguns elementos da álgebra linear para apresentar o teorema de unicidade da decomposição cíclica em relação a um espaço vetorial, quando este é gerado por um número finito de vetores. De maneira intuitiva, tal unicidade dimensional se da no seguinte sentido: se para um espaço vetorial de dimensão finita, existem duas decomposições cíclicas então as mesmas tem o mesmo número de parcelas as quais tem duas a duas a mesma dimensão. Uma implicação interessante deste fato é que a forma canônica de Jordam para um operador linear, em um espaço de dimensão finita, é única.

No desenvolvimento do nosso trabalho escrevemos três capítulos, além desta introdução. O capítulo dois faz um apanhado de alguns resultados da álgebra linear para fixar a notação e enunciar algumas ferramentas necessárias para a prova do teorema de unicidade. No capítulo três definimos a decomposição cíclica, tendo como base o teorema da decomposição primária. Finalmente no capítulo quatro, via indução finita, enunciamos e demonstramos o resultado principal deste trabalho. Além disso fazemos algumas considerações sobre este trabalho.

2 Preliminares

Definição 1. Sejam $V_i \subset V$, $i = 1, \dots, k$ subespaços de um espaço vetorial V . A soma de subespaços é definida por $\sum_{i=1}^k V_i = \{\sum_{i=1}^k v_i; v_i \in V_i\}$.

Observação 1. O conjunto obtido na definição 1 é um subespaço de V já que V_i o é $\forall i = 1, \dots, k$.

Definição 2. Sejam $V_i \subset V$, $i = 1, \dots, k$ subespaços de um espaço vetorial V . A soma direta entre esses subespaços é definida por $\bigoplus_{i=1}^k V_i = \{w = \sum_{i=1}^k v_i; v_i \in V_i\}$, onde w é expresso de maneira única.

Proposição 3. *Sejam $V_i \subset V$, $i = 1, \dots, k$ subespaços de um espaço vetorial V , tais que $V = \sum_{i=1}^k V_i$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- a) $V = \bigoplus_{i=1}^k V_i$;
- b) $V_i \cap \{\sum_{j=1}^{i-1} V_j\} = \{0\}$, $\forall i = 2, \dots, k$;
- c) Se β_i é base de V_i , $i = 1, \dots, k$ então $\beta = \bigcup_{i=1}^k \beta_i$ é base de V ;
- d) $\dim V = \sum_{i=1}^k \dim V_i$.

Prova. Suponha que se cumpre o item a). Seja $v \in V_i \cap \{\sum_{j=1}^{i-1} V_j\} = \{0\}$, $\forall i = 2, \dots, k$. Assim, podemos escrever v como,

$$\begin{aligned} v &= \sum_{j=1}^{i-1} v_j \\ v &= \sum_{j=1}^{i-1} 0 + v + \sum_{j=i+1}^k 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Como v se escreve de maneira única, dada a hipótese, temos em (1) que $v_j = 0$, $\forall j = 1, \dots, i-1$ do que concluímos que $v = 0$ e o item b).

Suponha válido o item b). Seja $\beta_i = \{v_{i1}, \dots, v_{ik_i}\}$ uma base de V_i . Defina $\beta = \bigcup_{i=1}^k \beta_i$. Assim $\sum_{i=1}^k V_i = [\beta]$, pela definição de soma (definição 1). Suponha por absurdo que β seja linearmente dependente. Note que existe i_0 , mínimo tal que B_{i_0} contém $v_{i_0 j_0}$ que é uma combinação linear dos seus antecessores em $\bigcup_{i=1}^{i_0} \beta_i$. É fato que $i_0 \geq 2$, pois β_1 é base de V_1 , e qualquer um dos seus vetores não pode ser combinação linear dos outros. Sendo assim, temos que

$$v_{i_0 j_0} = \sum_{n=1}^{j_0-1} a_{i_0 n} v_{i_0 n} + \sum_{n=1}^{k_1} a_{1n} v_{1n} + \dots + \sum_{n=1}^{k_{i_0-1}} a_{i_0-1n} v_{i_0-1n} \quad (2)$$

e (2) implica que

$$v = v_{i_0 j_0} - \sum_{n=1}^{j_0-1} a_{i_0 n} v_{i_0 n} = \sum_{n=1}^{k_1} a_{1n} v_{1n} + \dots + \sum_{n=1}^{k_{i_0-1}} a_{i_0-1n} v_{i_0-1n}. \quad (3)$$

Logo (3) nos diz que $v \in V_{i_0} \cap \{\sum_{l=1}^{i_0-1} V_l\}$, $\forall i_0 = 2, \dots, k_0$ e da hipótese $v = 0$. Mas assim, $v_{i_0 j_0} = \sum_{n=1}^{j_0-1} a_{i_0 n} v_{i_0 n}$ nos dizendo que β_{i_0} é linearmente dependente, um absurdo, já que este conjunto é base de V_{i_0} . Logo β é linearmente independente e é verdadeiro o item c).

Suponha que se cumpre o item c). Seja β_i base de V_i . Então da hipótese $\beta = \bigcup_{i=1}^k \beta_i$ é base de V . Assim sendo, ocorre que $\beta_i \cap \beta_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$, pois do contrário se existe $i \neq j$ tal que $\exists v \in \beta_i \cap \beta_j$, poderíamos retirar v de β_j , por exemplo, e ter ainda que β é base de V , mas no entanto $\beta_j / \{v\}$, não é base de V_j , uma contradição. Portanto temos que $\beta_i \cap \beta_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$ do que advém que

$$\dim V = \text{car}(\beta) = \sum_{i=1}^k \text{car}(\beta_i) = \sum_{i=1}^k \dim V_i, \quad (4)$$

e (4) comprova o item d).

Por fim assuma a veracidade do item d). Seja β_i base de V_i . Assim $\beta = \bigcup_{i=1}^k \beta_i$ gera $V = \sum_{i=1}^k V_i$, pela definição 1. Pelo teorema do completamento, temos que $\dim V \leq \text{car}(\beta)$. Por outro lado da hipótese e da definição de β temos que

$$\dim V = \sum_{i=1}^k \dim V_i = \sum_{i=1}^k \text{car}(\beta_i) \geq \text{car}(\beta). \quad (5)$$

Pela propriedade antissimétrica da relação $\preceq$ temos de (5) que β é base de V . Logo dado $v \in V$ podemos expressar

$$v = \sum_{n \geq 1} a_{1n} v_{1n} + \dots + \sum_{n \geq 1} a_{kn} v_{kn}. \quad (6)$$

Suponha que v possa ser expresso ainda por

$$v = \sum_{n \geq 1} b_{1n} v_{1n} + \dots + \sum_{n \geq 1} b_{kn} v_{kn}. \quad (7)$$

Sendo assim de (6) e (7) temos que

$$0 = \sum_{n \geq 1} (a_{1n} - b_{1n}) v_{1n} + \dots + \sum_{n \geq 1} (a_{kn} - b_{kn}) v_{kn}, \quad (8)$$

e sendo β linearmente independente ocorre em (8) que $a_{in} = b_{in}$, $\forall i = 1, \dots, k$. Em suma v se escreve de maneira única e temos o item a). $\square$

Definição 4. Sejam $p_i(t) \in \mathbb{K}(t)$, $i = 1, \dots, k$. Se $\text{mdc}(\{p_i(t)\}) \equiv 1$ então esses polinômios são primos entre si.

Observação 2. Se $\{p_i(t); i = 1, \dots, k\}$ são primos entre si então $I = \sum_{i=1}^k p_i(t) \mathbb{K}(t) = \mathbb{K}(t)$.

Proposição 5. Seja $I \subset \mathbb{K}(t)$ um ideal em $\mathbb{K}(t)$, com $I \neq \{0\}$. Então existe um único polinômio mônico $m(t) \in I$ tal que $I = m(t) \mathbb{K}(t)$.

Prova. Tome $m(t) \in I$ o polinômio mônico, não nulo, de menor grau em I . Pelo fato de I ser ideal pela sua definição temos que $m(t) \mathbb{K} \subset I$. Por outro lado, seja $q(t) \in I$ e note que devido a definição de $m(t)$, $\partial q(t) \geq \partial m(t)$. Logo pelo algoritmo da divisão temos que,

$$\begin{aligned} q(t) &= m(t)p(t) + r(t) \implies \\ r(t) &= q(t) - m(t)p(t) \end{aligned} \quad (9)$$

com $p(t), r(t) \in \mathbb{K}(t)$ e $\partial r(t) < \partial m(t)$. Logo de (9) decorre que $r(t) \in I$ e dado a minimalidade de $m(t)$ então $r(t) \equiv 0$, o que implica que $q(t) = m(t)p(t) \in m(t) \mathbb{K}(t)$. A unicidade decorre do fato de que $m(t)$ é mônico. $\square$

Definição 6. Seja $A \in L(V)$. O ideal anulador de A é definido por $I_A = \{p(t) \in \mathbb{K}(t); p(A) \equiv 0\}$.

Definição 7. Seja $A \in L(V)$. O polinômio minimal de A é denotado por $m_A(t)$ e definido $m_A(t) \in \mathbb{K}(t)$ tal que $I_A = m_A(t) \mathbb{K}(t)$.

Definição 8. Seja $A \in L(V)$ e $v \in V$. O ideal anulador de v com respeito a A é definido por $I_v = \{p(t) \in \mathbb{K}(t); p(A)(v) \equiv 0\}$.

Definição 9. Seja $A \in L(V)$ e $v \in V$. O polinômio minimal de v é denotado por $m_v(t)$ e definido $m_v(t) \in \mathbb{K}(t)$ tal que $I_v = m_v(t)\mathbb{K}(t)$.

Observação 3. Temos que pela definição 9 $I_A \subset I_v$ do que decorre que o polinômio minimal $m_v(t)$ divide $m_A(t)$.

Definição 10. Sejam $A \in L(V)$ e W subespaço de V . Assim W é A-invariante se $A(W) \subset W$.

Observação 4. Seja $B \in L(V)$. Então $NucB$ e ImB são B-invariantes. De fato, seja $v \in NucB$. Assim $B(v) = 0 \in NucB$, já que $NucB$ é subespaço de V . Da mesma forma, tome $v \in ImB$. Logo existe $u \in V$ tal que $v = B(u) \in ImB$. Sendo assim $B(v) = B(B(u))$, e sendo B operador linear temos que $B(u) \in V$ donde $B(v) \in ImB$.

Definição 11. Sejam $V = \bigoplus_{i=1}^k V_i$ e $A \in L(V)$. Assim a soma direta é invariante por A , se $\forall i = 1, \dots, k, A(V_i) \subset V_i$.

Definição 12. Seja $v \in V, A \in L(V)$ e considere $\epsilon = \{v, A(v), \dots, A^n(v), \dots\} \subset V$. Um subespaço A-cíclico gerado por v , é um subespaço de V denotado por $C(v)$ e definido por $C(v) = [\epsilon]$.

Observação 5. Seja $p(t) \in \mathbb{K}_n(t) \subset \mathbb{K}(t)$. Assim para $A \in L(V)$ e $v \in C(v)$ temos que

$$p(A)(v) = a_n A^n(v) + \dots + a_1 A(v) + a_0 Id(v). \quad (10)$$

Por (10) podemos caracterizar $C(v) = \{p(A)(v); p(t) \in \mathbb{K}_n(t)\}$.

Proposição 13. *Seja $A \in L(V)$ e $v \in V$, com $v \neq 0$ e $m_v(t)$ o polinômio minimal de v . Sendo assim as seguintes afirmações são verdadeiras,*

a) *Se $\partial m_v(t) = k_0$ então $\beta = \{v, A(v), \dots, A^{k_0-1}(v)\}$ é base de $C(v)$ e assim $\dim C(v) = \partial m_v(t)$;*

b) *Se $A_0 \in L(C(v))$ é induzido por A então $m_{A_0}(t) = m_v(t)$.*

Prova. Faremos a prova em ordem alfabética. Seja $w \in C(v)$. Assim pela observação 5 existe $p(t) \in \mathbb{K}_n(t) \subset \mathbb{K}(t)$ tal que $w = p(A)(v)$. Também utilizando o algoritmo da divisão escrevemos

$$p(t) = q(t)m_v(t) + r(t), \text{ com } \partial r(t) < \partial m_v(t). \quad (11)$$

Avaliando (11) em A e calculando tal avaliação em v obtemos, dada a definição de $m_v(t)$ (definição 9)

$$w = p(A)(v) = q(A)(v)m_v(A)(v) + r(A)(v) = r(A)(v). \quad (12)$$

Logo de (12) e da observação 5 como $\partial r(t) < \partial m_v(t)$, então $w \in [\beta]$.

Sejam $a_i \in \mathbb{K}, i = 1, \dots, k_0 - 1$ tais que

$$a_{k_0-1} A^{k_0-1}(v) + \dots + a_1 A(v) + a_0 Id(v) = 0. \quad (13)$$

Assim (13) define $p(t) \in \mathbb{K}_{k_0-1}(t) \subset \mathbb{K}(t)$ e nos diz que $p(t) \in I_v$ pela definição de ideal anulador de v (definição 8), e disso segue que como $\partial p(t) < \partial m_v(t)$ então $p(t) \equiv 0$ de onde vem que $a_i = 0, \forall i = 1, \dots, k_0 - 1$. Portanto β é linearmente independente e é verdadeiro o item a).

Para provar o item b), seja $p(t) \in I_{A_0}$. Assim $p(A_0)(w) = 0, \forall w \in C(v)$ e como $v \in C(v)$ temos que $p(A_0)(v) = 0$. Disso já que $p(A)(v) = p(A_0)(v)$, sendo A_0 a restrição de A a $C(v)$ então $p(A)(v) = 0$ e isso significa que $p(t) \in I_v$, pela definição 8.

Por outro lado, sejam $p(t) \in I_v$ e $w \in C(v)$. Pela observação 5, podemos escrever $w = q(A)(v)$, para algum $q(t) \in \mathbb{K}_n(t)$. Como $v \in C(v)$ e A_0 é a restrição induzida por A ocorre que $w = q(A)(v) = q(A_0)(v)$. Logo, como polinômios em A comutam na composição e essa operação é distributiva em relação a soma, temos que dada a definição de $p(t)$,

$$p(A_0)(w) = p(A_0) \circ q(A_0)(v) = q(A) \circ p(A_0)(v) = 0, \quad (14)$$

e (14) é verdadeira donde $p(A)(v) = p(A_0)(v)$. Portanto $p(t) \in I_{A_0}$ comprovando o item b). $\square$

3 A definição de decomposição cíclica.

Dado V um espaço vetorial em $A \in L(V)$ construiremos uma decomposição em soma direta para V que tem uma interessante relação com o polinômio minimal de A , $m_A(t)$. Tal decomposição é a base da definição de decomposição cíclica.

Teorema 14. (Teorema da decomposição primária) *Seja $A \in L(V)$. Se $m_A(t) = p_1(t)^{r_1} \dots p_k(t)^{r_k}$ é a fatoração primária do polinômio minimal de A , então*

$$V = Nucp_1(A)^{r_1} \oplus \dots \oplus Nucp_k(A)^{r_k}$$

onde $Nucp_i(A)^{r_i}$ é A -invariante $\forall i = 1, \dots, k$.

Prova. Seja $A \in L(V)$. Se $k = 1$ então da hipótese $m_A(t) = p_1(t)^{r_1}$. Logo temos que $V = Nucp_1(A)^{r_1}$, pois pela definição de $m_A(t)$ (definição 7) ocorre que $p_1(A)^{r_1} \equiv 0$ e assim sendo $Nucp_1(A)^{r_1} = Nuc\ 0 = V$. Como a composição é distributiva em relação a soma e A comuta com potências de si mesmo, então $A(Nucp_1(A)^{r_1}) \subset Nucp_1(A)^{r_1}$ e $Nucp_1(A)^{r_1}$ é A -invariante pela definição 10.

Suponha agora que $k \geq 2$. Defina para $i = 1, \dots, k$ o polinômio

$$m_{\bar{i}}(t) = p_1(t)^{r_1} \dots \overline{p_i}(t)^{r_i} \dots p_k(t)^{r_k} \quad (15)$$

onde a barra em (15) indica que o i -ésimo fator foi suprimido. Por esta construção os polinômios $m_{\bar{i}}(t)$ são primos entre si e pela observação 2 a soma dos ideais gerados pela família $\{m_{\bar{i}}(t)\}$ é igual a $\mathbb{K}(t)$. Ou seja, $\mathbb{K}(t) = m_{\bar{1}}(t)\mathbb{K}(t) + \dots + m_{\bar{k}}(t)\mathbb{K}(t)$. Logo existem $q_i \in \mathbb{K}(t)$, $i = 1, \dots, k$ tais que

$$1 \equiv m_{\bar{1}}(t)q_1(t) + \dots + m_{\bar{k}}(t)q_k(t). \quad (16)$$

Seja $v \in V$. Avalie (16) em A e no operador obtido calcule v . Assim podemos escrever,

$$v = Id(v) = [m_{\bar{1}}(A) \circ q_1(A)](v) + \dots + [m_{\bar{k}}(A) \circ q_k(A)](v). \quad (17)$$

Defina $\pi_i \in L(V)$ por $\pi_i = m_{\bar{i}}(A) \circ q_i(A)$, $i = 1, \dots, k$. Logo, temos de (17) que $v = \sum_{i=1}^k v_i$, com $v_i \in \text{Im}\pi_i$, do que decorre que $V = \sum_{i=1}^k \text{Im}\pi_i$.

Objetivando provar que $V = \sum_{i=1}^k \text{Nuc}p_i(A)^{r_i}$, com $p_i(A)^{r_i} \in L(V)$ basta mostrar que $\text{Im}\pi_i \subset \text{Nuc}p_i(A)^{r_i} \forall i = 1, \dots, k$. Para isto seja $w \in \text{Im}\pi_i$. Assim existe $v \in V$ tal que $w = \pi_i(v) = m_{\bar{i}}(A) \circ q_i(A)(v)$. De 15, temos que $m_A(t) = p_i(t)^{r_i} m_{\bar{i}}(t)$. Pela observação 3 que $I_A \subset I_v$, $\forall v \in V$ e disso temos que $m_A(t) \in I_v$. Também como potências de A comutam na composição e esta operação é associativa e distributiva em relação a soma, valem seguintes as igualdades

$$\begin{aligned} p_i(A)^{r_i}(w) &= p_i(A)^{r_i} \circ (m_{\bar{i}}(A) \circ q_i(A)(v)) \\ &= (p_i(A)^{r_i} \circ m_{\bar{i}}(A)) \circ q_i(A)(v) \\ &= m_A(A) \circ q_i(A)(v) \\ &= q_i(A) \circ m_A(A)(v) = q_i(A)(0) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Logo de (18) $w \in \text{Nuc}p_i(A)^{r_i}$. Resta provar então que é soma direta dos núcleos em questão. Pela proposição 3 só é preciso provar que $X = \text{Nuc}p_i(A)^{r_i} \cap \{\sum_{j=1}^{i-1} \text{Nuc}p_j(A)^{r_j}\} = \{0\}$, $\forall i = 2, \dots, k$. Com efeito, tome $v \in X$. Sendo assim,

$$v \in \text{Nuc}p_i(A)^{r_i} \text{ e } v = \sum_{j=1}^{i-1} v_j \quad (19)$$

com $v_j \in \text{Nuc}p_j(A)^{r_j}$, $\forall j = 1, \dots, i-1$. Defina $q(t) = p_1(t)^{r_1} \dots p_{i-1}(t)^{r_{i-1}}$ e note que assim $q(t)$ e $p_i(t)^{r_i}$ são primos entre si. Observando que polinômios em A comutam na composição, $p_j(A)^{r_j}(v_j) = 0$, $\forall j = 1, \dots, i-1$, considerando (19), avaliando $q(t)$ em A e calculando o operador obtido em v temos que

$$q(A)(v) = \sum_{j=1}^{i-1} (p_1(A)^{r_1} \circ \dots \circ \overline{p_j}(A)^{r_j} \circ \dots \circ p_{i-1}(A)^{r_{i-1}}) \circ p_j(A)^{r_j}(v_j) = 0 \quad (20)$$

onde a barra indica que o j -ésimo termo foi comutado para fora da composição em parenteses. Então (20) nos diz que $q(t) \in I_v$. Também de 19 temos que $p_i(t)^{r_i} \in I_v$. Como argumentamos que tais polinômios são primos entre si então da observação 2 ocorre que o polinômio minimal de I_v é $m_v(t) \equiv 1$. Logo temos que $m_v(A)(v) = v$ e pela definição 9 ocorre que $m_v(A)(v) = 0$ e concluímos então que $v = 0$, mostrando então que V pode ser decomposto em soma direta, como desejado. Dado ainda que polinômios em A comutam temos que $A(\text{Nuc}p_i(A)^{r_i}) \subset \text{Nuc}p_i(A)^{r_i}$, para $i = 1, \dots, k$, temos que cada parcela da decomposição obtida é A -invariante, pela definição 10, concluindo a prova. $\square$

Definição 15. Considere que $V = \bigoplus_{i=1}^k \text{Nuc}p_i(t)^{r_i}$, com $i = 1, \dots, k$ é a decomposição primária de V em relação a $A \in L(V)$ (teorema 14). Uma decomposição cíclica de V é uma decomposição em soma direta desse espaço em que cada parcela da decomposição primária esta decomposta na forma

$$\begin{cases} \text{Nuc}p_i(t)^{r_i} = C(v_1) \oplus \dots \oplus C(v_{m_i}) \\ \partial p_i(t)^{r_i} = \dim C(v_1) \geq \dots \geq \dim C(v_{m_i}) \end{cases}$$

para cada $i = 1, \dots, k$.

4 A unicidade da decomposição cíclica.

Observação 6. Demonstraremos a unicidade da decomposição cíclica no seguinte sentido: se há duas decomposições cíclicas para um mesmo espaço vetorial então essas são iguais a menos de uma reordenação nos termos da base. Sendo assim tal decomposição é dimensionalmente única.

Lema 16. *Seja $A \in L(V)$, com V sobre $\mathbb{K}$. As seguintes afirmações são verdadeiras.*

- a) *Se $w \in C(v)$ então $C(w) \subset C(v)$.*
- b) *$q(A)(C(v)) = C(q(A)(v))$, $\forall q(t) \in \mathbb{K}(t)$.*
- c) *Se existe uma decomposição em soma direta para V , dada por*

$$V = C(v_1) \oplus \dots \oplus C(v_m), \text{ então}$$

$$p(A)(V) = C(p(A)(v_1)) \oplus \dots \oplus C(p(A)(v_m)), \forall p(t) \in \mathbb{K}(t).$$

Prova. Faremos a prova em ordem alfabética. Pela observação 5 podemos caracterizar $C(v) = \{p(A)(v); p(t) \in \mathbb{K}(t)\}$, assim como $C(w) = \{q(A)(w); q(t) \in \mathbb{K}(t)\}$. Seja $u \in C(w)$ e admita que $w \in C(v)$. Então de tais caracterizações temos que existe $q(t) \in \mathbb{K}(t)$ tal que $u = q(A)(w)$, bem como existe $p(t) \in \mathbb{K}(t)$ tal que $w = p(A)(v)$. Combinando essas relações temos que $u = q(A) \circ p(A)(v)$, o que nos diz que existe $r(t) = q(t)p(t)$ tal que $u = r(A)(v)$ e sendo assim $u \in C(v)$. Assim vale o item a).

Para o item b) seja $q(t) \in \mathbb{K}(t)$. Considere pela observação 5 a caracterização $C(v) = \{p(A)(v); p(t) \in \mathbb{K}(t)\}$ e note que disso decorre que $q(A)(C(v)) = \{q(A) \circ p(A)(v); p(t) \in \mathbb{K}(t)\}$. Por outro lado dada a mesma observação podemos caracterizar $C(q(A)(v)) = \{q(A) \circ p(A)(v); p(t) \in \mathbb{K}(t)\}$. Portanto uma vez que polinômios em A comutam na composição e tal operação é distributiva em relação a soma então das caracterizações determinadas temos que $q(A)(C(v)) = C(q(A)(v))$, $\forall q(t) \in \mathbb{K}(t)$. Temos portanto o item b).

Por fim considere que $V = C(v_1) \oplus \dots \oplus C(v_m)$. Sejam $p(t) \in \mathbb{K}(t)$ e $v \in V$. Note que da observação 5 podemos caracterizar $C(v_i) = \{q_i(A)(v_i); q_i(t) \in \mathbb{K}(t)\}$, $\forall i = 1, \dots, m$. Sendo assim dada a hipótese, podemos escrever $v = q_1(A)(v_1) + \dots + q_m(A)(v_m)$. Logo avaliando $p(t)$ em $A \in L(V)$ e calculando o operador obtido em v , e observando também que a composição é distributiva em relação a soma e polinômios em A comutam nesta operação, então temos que

$$p(A)(v) = p(A) \circ q_1(A)(v_1) + \dots + p(A) \circ q_m(A)(v_m). \quad (21)$$

Pela observação 5 a expressão dada em (21) nos diz que $p(A)(v) \in p(A)(C(v_1)) + \dots + p(A)(C(v_m))$. Sendo assim temos pelo item b), que $p(A)(v) \in C(p(A)(v_1)) + \dots + C(p(A)(v_m))$. Dada a arbitrariedade de $v \in V$ então concluímos que

$$p(A)(V) = C(p(A)(v_1)) + \dots + C(p(A)(v_m)). \quad (22)$$

Mostraremos que tal soma dada em (22) é direta, pela proposição 3. Seja

$$v \in [C(p(A)(v_i)) \cap \{C(p(A)(v_1)) + \dots + C(p(A)(v_{i-1}))\}], \text{ com } 2 \leq i \leq m. \quad (23)$$

De (23) ocorre que

$$v = q_i(A) \circ p(A)(v_i) \text{ e } v = \sum_{j=1}^{i-1} q_j(A) \circ p(A)(v_j). \quad (24)$$

Logo definindo $r_j(t) = q_j(t) \circ p(t)$ para $j = 1, \dots, i$, obtemos de (24)

$$v = r_i(A)(v_i) \text{ e } v = \sum_{j=1}^{i-1} r_j(A)(v_j). \quad (25)$$

Considerando a observação 5, de (25) concluímos portanto que $v \in C(v_i)$ e $v \in C(v_1) + \dots + C(v_{i-1})$, e como $V = C(v_1) \oplus \dots \oplus C(v_m)$ a proposição 3 nos garante que $v = 0$, e deste mesmo resultado obtemos que

$$p(A)(V) = C(p(A)(v_1)) \oplus \dots \oplus C(p(A)(v_m)), \quad \forall p(t) \in \mathbb{K}(t). \quad (26)$$

Portanto de (26) é verdadeiro o item c). □

Teorema 17. (*Teorema da unicidade dimensional cíclica.*) *Seja $A \in L(V)$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, com $m_A(t) = p(t)^r$ e $p(t) \in \mathbb{K}(t)$ um polinômio primo. Se existe uma decomposição cíclica*

$$\begin{cases} V = C(v_1) \oplus \dots \oplus C(v_k) \\ \partial m_A(t) = \dim C(v_1) \geq \dots \geq \dim C(v_k) \end{cases}$$

mas existe outra decomposição cíclica

$$\begin{cases} V = C(u_1) \oplus \dots \oplus C(u_n) \\ \partial m_A(t) = \dim C(u_1) \geq \dots \geq \dim C(u_n) \end{cases}$$

então $k = n$ e $\dim C(v_i) = \dim C(u_i)$, $\forall i = 1, \dots, n = k$.

Prova. A prova será feita por indução. Inicialmente observamos que por hipótese $m_A(t) = p(t)^r$ e assim sendo, como ocorre que $I_A \subset I_v$, $\forall v \in V$ (observação 3) então temos necessariamente que

$$m_v(t) = p(t)^z, \quad \forall v \in V \text{ com } z \leq r \quad (27)$$

Para nossos propósitos é conveniente fazer a seguinte notação para denotar a decomposição cíclica,

$$V = \begin{cases} C(v_{11}) \oplus \dots \oplus C(v_{1k_1}) \oplus & \leftarrow \dim C(v_{ij}) = \partial p(t)^{r_1} \\ C(v_{21}) \oplus \dots \oplus C(v_{2k_2}) \oplus & \leftarrow \dim C(v_{ij}) = \partial p(t)^{r_2} \\ \ddots & \ddots \\ C(v_{m1}) \oplus \dots \oplus C(v_{mk_m}) & \leftarrow \dim C(v_{ij}) = \partial p(t)^{r_m} \end{cases} \quad (28)$$

em que cada linha de (28) é composta pelos subespaços de dimensão $\partial p(t)^{r_i}$, tais que $r = r_1 > \dots > r_m \geq 1$, $i = 1, \dots, m$. Supondo que haja outra decomposição cíclica, analogamente vamos denota-la por,

$$V = \begin{cases} C(u_{11}) \oplus \dots \oplus C(u_{1n_1}) \oplus & \leftarrow \dim C(u_{ij}) = \partial p(t)^{s_1} \\ C(u_{21}) \oplus \dots \oplus C(u_{2n_2}) \oplus & \leftarrow \dim C(u_{ij}) = \partial p(t)^{s_2} \\ \ddots & \ddots \\ C(u_{d1}) \oplus \dots \oplus C(u_{dn_d}) & \leftarrow \dim C(u_{ij}) = \partial p(t)^{s_d} \end{cases} \quad (29)$$

com $r = s_1 > \dots > s_d \geq 1$, $i = 1, \dots, d$. Feito isto utilizando o lema 16 para avaliar o operador $p(A)^{s_1-1}$ na primeira linha de ambas as decomposições cíclicas, dadas respectivamente por (28) e (29) temos que,

$$p(A)^{s_1-1}(V) = C(p(A)^{s_1-1}(v_{11})) \oplus \dots \oplus C(p(A)^{s_1-1}(v_{1k_1})), \quad (30)$$

$$p(A)^{s_1-1}(V) = C(p(A)^{s_1-1}(u_{11})) \oplus \dots \oplus C(p(A)^{s_1-1}(u_{1n_1})). \quad (31)$$

Tendo (30) e (31) em vista, observando que por hipótese $r = r_1 = s_1$ de (27) assim como da definição de polinômio minimal (definição 7)

$$\begin{aligned} m_{p(A)^{s_1-1}(v_{1j})}(t) &= p(t) = m_{p(A)^{s_1-1}(u_{1j})}(t) \implies \\ \partial m_{p(A)^{s_1-1}(v_{1j})}(t) &= \partial p(t) = \partial m_{p(A)^{s_1-1}(u_{1j})}(t). \end{aligned} \quad (32)$$

Logo de (32) temos pela proposição 13 que

$$\dim C(p(A)^{s_1-1}(v_{1j})) = \partial p(t) = \dim C(p(A)^{s_1-1}(u_{1j})), \quad (33)$$

e de (33) e da igualdade entre (30) e (31), contando as dimensões (o que é possível pela proposição 3)

$$\dim p(A)^{s_1-1}(V) = k_1 \partial p(t) = n_1 \partial p(t) \implies k_1 = n_1. \quad (34)$$

Temos por (34) que o resultado desejado é válido para a primeira linha. Suponha agora que o resultado seja válido até a j -ésima linha. Ou seja,

$$k_i = n_i \text{ e } \dim C(v_{ip}) = \dim C(u_{ip}) \text{ para } 1 \leq p \leq k_{im} \text{ e } 1 \leq i \leq j. \quad (35)$$

Considere (35) e note que se (28) tem a $(j+1)$ -ésima linha então (29) também tem, uma vez que do contrário, ocorre que $\dim V < \dim V$, um absurdo. Suponha por absurdo, sem perda de generalização que $r_{j+1} > s_{j+1}$. Sendo assim temos a seguinte notação para as decomposições cíclicas em questão

$$V = \begin{cases} C(v_{11}) \oplus \dots \oplus C(v_{1k_1}) \oplus & \leftarrow \dim C(v_{ij}) = \partial p(t)^{r_1} \\ \ddots & \ddots \\ C(v_{j1}) \oplus \dots \oplus C(v_{jk_j}) \oplus & \leftarrow \dim C(v_{ij}) = \partial p(t)^{r_j} \\ C(v_{j+1,1}) \oplus \dots \oplus C(v_{j+1,k_{j+1}}) & \leftarrow \dim C(v_{ij}) = \partial p(t)^{r_{j+1}} \end{cases}. \quad (36)$$

$$V = \begin{cases} C(u_{11}) \oplus \dots \oplus C(u_{1k_1}) \oplus & \leftarrow \dim C(u_{ij}) = \partial p(t)^{r_1} \\ \ddots & \ddots \\ C(u_{j1}) \oplus \dots \oplus C(u_{jk_j}) \oplus & \leftarrow \dim C(u_{ij}) = \partial p(t)^{r_j} \\ C(u_{j+1,1}) \oplus \dots \oplus C(u_{j+1,k_{j+1}}) & \leftarrow \dim C(u_{ij}) = \partial p(t)^{s_{j+1}} \end{cases}, \quad (37)$$

onde $r_{j+1} > s_{j+1}$. Logo avaliando o operador $p(A)^{s_{j+1}}$ em (36) e (37) respectivamente, pelo lema 16 ocorre que

$$p(A)^{s_{j+1}}(V) = \begin{cases} C(p(A)^{s_{j+1}}(v_{11})) \oplus \dots \oplus C(p(A)^{s_{j+1}}(v_{1k_1})) \oplus & \leftarrow \dim C(p(A)^{s_{j+1}}(v_{ij})) = \partial p(t)^{r_1 - s_{j+1}} \\ \ddots & \ddots \\ C(p(A)^{s_{j+1}}(v_{j1})) \oplus \dots \oplus C(p(A)^{s_{j+1}}(v_{jk_j})) \oplus & \leftarrow \dim C(p(A)^{s_{j+1}}(v_{ij})) = \partial p(t)^{r_j - s_{j+1}} \\ C(p(A)^{s_{j+1}}(v_{j+1,1})) \oplus \dots \oplus C(p(A)^{s_{j+1}}(v_{j+1,k_{j+1}})) & \leftarrow \dim C(p(A)^{s_{j+1}}(v_{ij})) = \partial p(t)^{r_{j+1} - s_{j+1}} \end{cases} \quad (38)$$

$$p(A)^{s_{j+1}}(V) = \begin{cases} C(p(A)^{s_{j+1}}(u_{11})) \oplus \dots \oplus C(p(A)^{s_{j+1}}(u_{1k_1})) \oplus & \leftarrow \dim C(p(A)^{s_{j+1}}(u_{ij})) = \partial p(t)^{r_1 - s_{j+1}} \\ \ddots & \ddots \\ C(p(A)^{s_{j+1}}(u_{j1})) \oplus \dots \oplus C(p(A)^{s_{j+1}}(u_{jk_j})) \oplus & \leftarrow \dim C(p(A)^{s_{j+1}}(u_{ij})) = \partial p(t)^{r_j - s_{j+1}} \\ \overline{C(p(A)^{s_{j+1}}(u_{j+1,1})) \oplus \dots \oplus C(p(A)^{s_{j+1}}(u_{j+1,k_{j+1}}))} & \leftarrow \dim C(p(A)^{s_{j+1}}(u_{ij})) = \partial p(t)^{s_{j+1} - s_{j+1}} = 0 \end{cases} \quad (39)$$

onde a barra em (39) indica que a $(j+1)$ -ésima linha foi suprimida uma vez que da proposição 13 e de (27) $m_{u_{j+1},l}(t) = p(t)^{s_{j+1}}$, donde $p(A)^{s_{j+1}}(u_{j+1},l) = 0$ (definição 7) para cada $l = 1, \dots, k_{j+1}$. No entanto considerando que da hipótese de indução temos que $r_i = s_i$ com $k_i = n_i$ se $1 \preceq i \preceq j$, então há uma contradição com a dimensão de $p(A)^{s_{j+1}}(V)$, pois a dimensão obtida por (38) para este espaço é maior que encontramos em (39) na segunda decomposição para o mesmo. Portanto temos que $r_{j+1} = s_{j+1}$ e por isso em ambas decomposições cíclicas para V temos que a $(j+1)$ -ésima linha tem o mesmo número parcelas, devido essa restrição dimensional. Em outras palavras concluímos que

$$k_i = n_i \text{ e } \dim C(v_{ip}) = \dim C(u_{ip}) \text{ para } 1 \leq p \leq k_{im} \text{ e } 1 \leq i \leq j+1 \quad (40)$$

e portanto de (40) temos a tese. $\square$

5 Considerações

Deduzimos assim que a decomposição cíclica para um espaço vetorial de dimensão finita é dimensionalmente única, o que nos faz concluir que tal decomposição é única, a menos de um reordenamento nos termos da base.

- ANDRADE, Plácido Franscisco De Assis. Um curso de álgebra linear. 1 ed. Ceará: UFC - Departamento de Matemática, 2003. 217 p.
- COELHO, Flavio Ulhoa; LOURENÇO, Mary Lilian. Um curso de álgebra linear. 2 ed. São Paulo: EDUSP, 2010. 272 p.
- DOMINGUES, Hygino; IEZZI, Gelson. Álgebra moderna. 2 ed. São Paulo: Atual, 1982. 263 p.
- GARCIA, Arnaldo; LEQUAIN, Ives. Elementos de álgebra. 6 ed. Rio de Janeiro: Impa, 2015. 363 p.
- HOFFMAN, Kenneth; KUNZE, Ray. Álgebra linear. 2 ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1979. 514 p.

OpenSCAD, gerando modelos tridimensionais para uso no ensino de geometria

Clezio Aparecido Braga
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
clezio.braga@unioeste.br

João Augusto Brandalize
Acadêmico do Curso de Engenharia Civil - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
j4brandalize@gmail.com

Resumo: Fazemos a abordagem e estudo do software de desenho bi e tridimensional “OpenSCAD”, destacando alguns exemplos de como podemos usá-lo para gerar modelos de objetos para o uso no ensino de matemática, Além de explorar a matemática envolvida no uso do próprio software.

Palavras-chave: Desenho CAD; Impressão 3D; Objetos Manipuláveis; Sólidos Geométricos.

1 Introdução

Dispomos atualmente de uma série de ferramentas tecnológicas que têm servido de apoio ao estudo de matemática nos ensinos fundamental e médio e até a nível superior. Uso de softwares matemáticos são comuns no ensino superior, disseminação de conteúdo em forma digital e uso de aparatos tecnológicos estão cada vez mais presentes e ao alcance dos estudantes. Entretanto parte do conhecimento de com essas coisas funcionam nem sempre são explorados. Esse texto faz uma breve apresentação do software gráfico OpenSCAD, um software de desenho CAD (computer aided design) programável por linha de comando e que usa fortemente conceitos matemáticos para gerar sua arte gráfica. Um software com facilidades para desenho de objetos sólido e desenhos mecânicos que pode ser aproveitado para gerar estruturas geométricas para ensino de geometria e projetar ferramentas para o uso no ensino de matemática de uma forma geral nos níveis fundamental médio e superior. Com a impressão 3D se popularizando o software se mostra como uma poderosa ferramenta para criação de objetos físicos para uso em salas de aulas e para recriar experimentos e experiências manuseáveis de conceito abstratos. Também permite ao usuário um aprofundamento na compreensão dos conceito matemáticos envolvidos nas ferramenta de criação de objetos durante programação. Conceitos como união, interseção, complementação de conjuntos, formas geométricas básicas, processos de construção interativos, divisão de ângulos, transformações lineares de rotações, translação por vetor fixo, translações de coordenadas, projeções e aplicação de funções, geração de polígonos e extrusões lineares circulares são alguns dos conceitos por trás do funcionamento da ferramenta de desenho computadorizada, além de se poder implementar desenhos paramétrico que permite gerar, com simples mudanças no valor de algumas variáveis, um novo objeto sem muito esforço.

Aqui ilustraremos alguns modelos de sólidos geométricos, algumas superfícies especiais e também usaremos um arquivo já programado para gerar vértices “conectores” para construir esqueletos de sólidos geométricos regulares.

2 O que é OpenSCAD?

Essencialmente é um software CAD, mas diferentemente da grande maioria dos aplicativos de desenho por computador, o OpenSCAD é essencialmente um “programador CAD”, um aplicativo que para gerar objetos gráficos utiliza como entrada linhas de comandos. Cada comando executa uma tarefa, digamos “mais simples” e concatenando comandos conseguimos gerar uma enorme gama de desenhos bi e tridimensionais.

Muito parecido com o compilador de textos “ $\text{\LaTeX}$ ” a geração da arte gráfica se faz através de iterações de comando, o que pode parecer a primeira vista, para um usuário iniciante, um tanto quanto “difícil”. Essa dificuldade, entretanto vai desaparecendo à medida que se vai compreendendo o funcionamento do aplicativo.

Mas então porque usar OpenSCAD para fins de criação modelos CAD se ele parece difícil de usar? Porque é um software com foco na precisão e em desenhos de objetos mecânicos.

Como podemos ver no tutorial “How to use OpenSCAD”.

The software shines whenever you want:

- 1) precise placement of object (as all objects have explicit numbered coordinates and sizes)
- 2) easily modifiable design, e.g. when you want to make a wall thicker or a hole larger, and the whole design adapts to the new numbers automatically. It is thus easy to find the “optimum” geometry, weight or robustness for real life applications.
- 3) a text-readable design, and easily recyclable components or behaviors

It is no surprise that Openscad is best suited to mechanical designs. As we said, compared to other 3D modelers, it shines when a number of iterations are required before the optimum geometry is obtained, because everything is controlled by numbers that can be tweaked extremely easily and at will (when it is programmed correctly). (FRANCOIS, 2014).

Entretanto não é um software para desenho artístico e pode ser muito decepcionante para alguém que queira utilizá-lo para esse fim.

Openscad fails badly with organic shapes though: it is not the right tool to design a mascot, statue, or non-abstract art. (FRANCOIS, 2014).

3 Usando OpenSCAD

O funcionamento do OpenSCAD é baseado em figuras geométricas fundamentais, tais como paralelepípedos, esferas, cilindros, cones e troncos de cones, conta com ferramentas de transformação isométricas de rotação em torno de um vetor, translações espaciais, extrusão 2D para 3D. Também conta com ferramentas de transformação de uniões, intersecções e diferença

entre objetos, que são fundamentais em elaborações mais complexas. Permite criar e gerenciar módulos e funções para criar parâmetros para construir objetos mais elaborados.

Por exemplo, podemos construir o objeto dado na Figura 1,

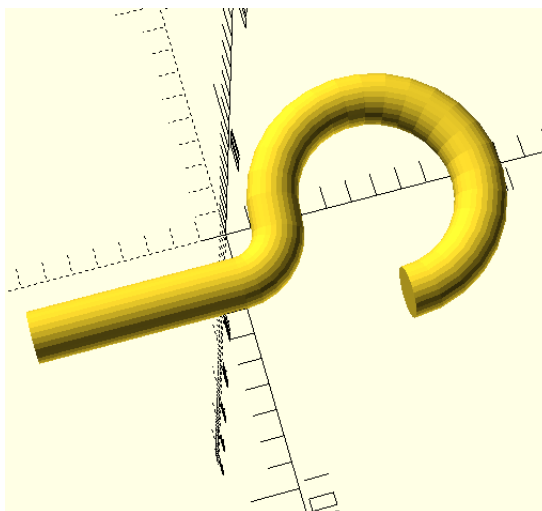


Figura 1: desenho composto

o qual é a junção dos três objetos dados na figura 2 e é obtido pelas seguintes linhas de comando.

```
translate([0,60,0])
  rotate_extrude(angle=270, convexity=10)
    translate([40, 0]) circle(10);
rotate_extrude(angle=90, convexity=10)
  translate([20, 0]) circle(10);
translate([20,0,0])
  rotate([90,0,0]) cylinder(r=10,h=80);
```

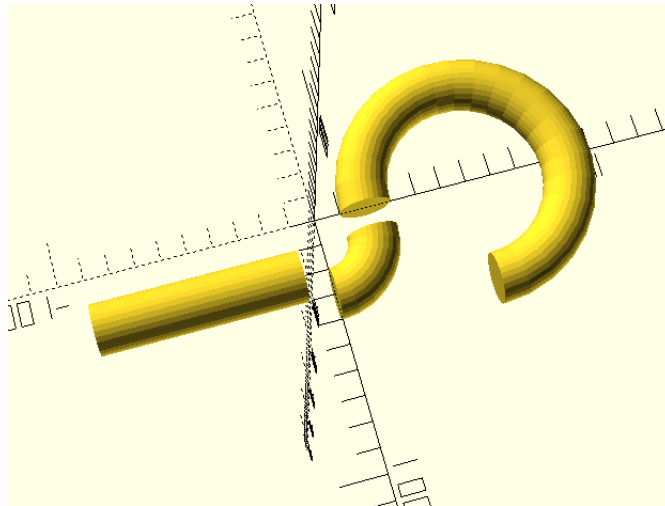


Figura 2: Partes do objeto gráfico

O objeto apresentado na Figura 1 é um objeto composto, no sentido que foram precisos 3 objetos “simples” para obter esse resultado.

Vamos usar o termo objeto simples para indicar um objeto no qual foi usado apenas um comando OpenSCAD para gerá-lo.

São exemplos de objetos simples:

a) A esfera

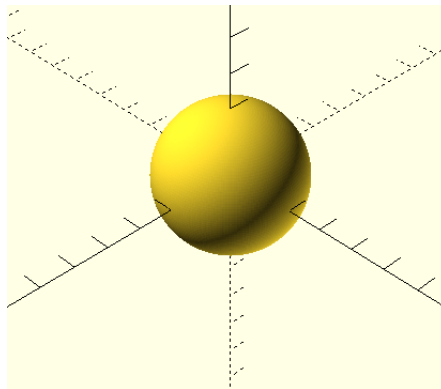


Figura 3: Esfera com raio 20 unidades

que é obtida pelo comando

```
sphere(20);
```

b) Cubo (paralelepípedo)

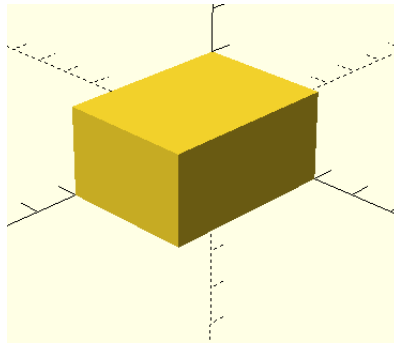


Figura 4: paralelepídeos de lados 40, 30 e 20 unidades

obtido pelo comando

```
cube([40,30,20]);
```

Observe que o paralelepípedo é obtido pelo comando “cube” com uma entrada vetorial a qual contempla as três dimensões do sólido.

c) O Cilindro

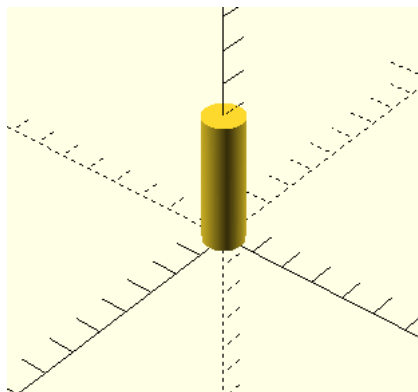


Figura 5: Cilindro

obtido pelo comando

```
$fn=180;  
cylinder(r=6,h=40);
```

Onde definimos o raio e a altura.

d) Variações do cilindro (tetredro)

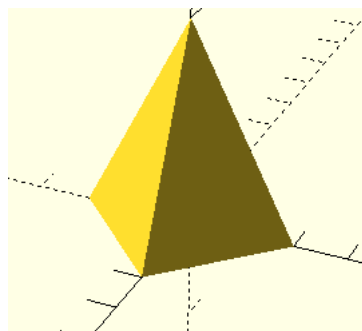


Figura 6: Tetraedro de base quadrada

obtido pelo comando

```
cylinder(r1=20,r2=0,h=40,$fn=4);
```

Aqui usamos o comando cylinder, mas especificamos o raio inferior, o raio superior a altura e número de faces.

Esses são apenas alguns exemplos de comandos “simples”, existem vários outros para geração 3D e ainda comandos simples para gerar objetos 2D. O OpenSCAD possui em seu menu “Help” o link “cheat sheet” que é uma folha de instruções que ajuda a usar cada um dos comandos disponíveis no aplicativo.

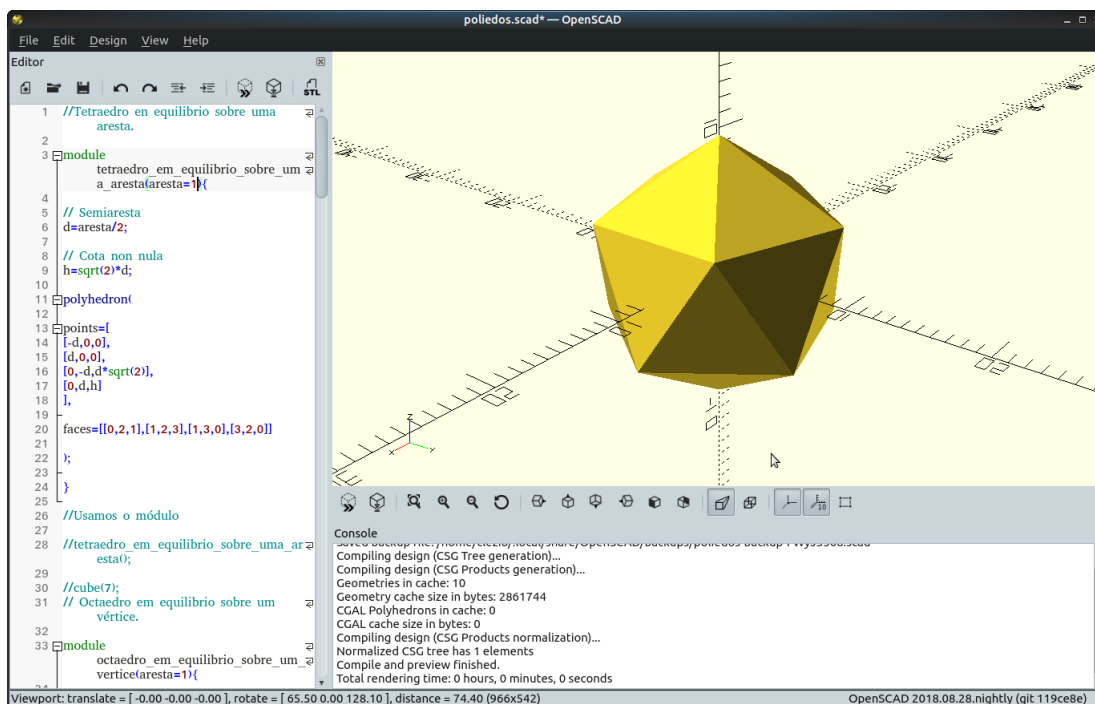


Figura 7: Janela do OpenSCAD

A janela geral de uso do software apresenta uma aba de programação e uma aba onde vemos o resultado gráfico do objeto programado.

Para obtenção de objetos complexos podem ser usadas bibliotecas adicionais, mas não abordaremos inclusão de bibliotecas nesse texto.

4 Objetos compostos

Como já comentamos acima, com a interação adequada dos comandos podemos obter geometrias mais elaboradas e dependendo do conhecimento e criatividade do usuários chegar bons resultados, como por exemplo o placa listada da figura 8



Figura 8: Placa informativa

Outro exemplo de extruturas complexas é uma polia de impressoras 3D que pode ser visto na figura 9.

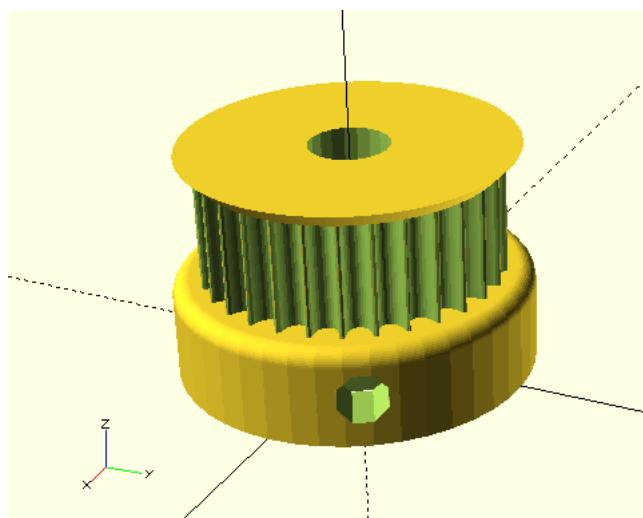


Figura 9: Polia sincronizadora

5 Uso em situação de ensino

Estamos estudando como podemos usar essa ferramenta de desenho para gerar objetos gráficos e modelos imprimíveis por impressão 3d que possam ser aproveitados por profissionais do ensino de matemática como ferramenta adicional no ensino e que possam ser usados tanto em formato físico ou por exibição de arquivo 3d (stl ou obj) do objeto por projeção multimídia. Em um primeiro momento pensamos em gerar sólidos geométricos com arquivos autoexplicativos. Não há restrições no uso do software quanto ao uso pois esse é livre e pode ser baixado da internet sem problemas. A única exigência é o computador ter algum desempenho gráfico pois a renderização é baseada na biblioteca gráfica de renderização “OpenGL” que exige algum desempenho, mas que nos computadores atuais não é um problema. Mais informações sobre OpenGL pode ser encontrada em [GLAESE e STACHEL].

O uso para ensino não se limita ao ensino de matemática, mas aqui focaremos no uso em geometria espacial.

5.1 O que podemos fazer com isso?

Apresentamos abaixo alguns sólidos geométricos com os respectivos códigos geradores apenas para ilustrar como podemos usar essa ferramenta de desenho no ensino de geometria espacial. Ao observar o código que gera as figuras é possível ver claramente o raciocínio matemático envolvido na construção dos objetos. Usando o comando `polyhedron` apresentamos alguns códigos usados para gerar sólidos espaciais. Seguem alguns exemplos com o código e o objeto gráfico lado a lado.

```
aresta=10;  
a=aresta;  
d=aresta/2;  
h=sqrt(2)*d;  
polyhedron(  
  points=[  
    [-d,0,0],//0  
    [d,0,0],//1  
    [0,-d,d*sqrt(2)],//2  
    [0,d,h],//3  
  ],  
  faces=[[0,2,1],[1,2,3],[1,3,0],[3,2,0]]  
);
```

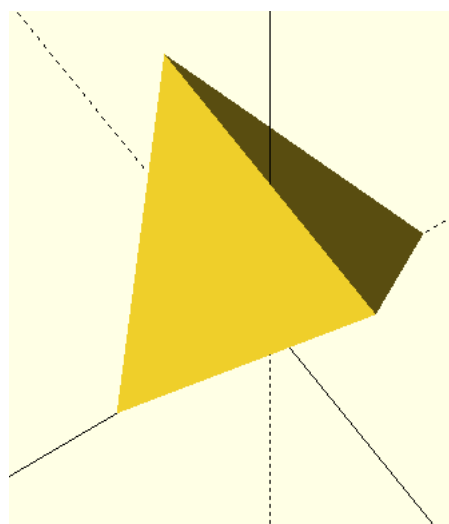


Figura 10: tetraedro

```

aresta=10;
a=aresta;
// Diagonal
d=sqrt(2)*aresta;
polyhedron(points=[[ (1/2)*a,
(-1/2)*a,0],[ (1/2)*a,
(1/2)*a,0],
[(-1/2)*a,(1/2)*a,0],
[(-1/2)*a,(-1/2)*a,0],
[0,0,(1/2)*d],
[0,0,(-1/2)*d]
],
faces=[
[0,4,1], [1,4,2], [2,4,3], [3,4,0],

[0,1,5], [1,2,5], [2,3,5], [3,0,5]]
);

```

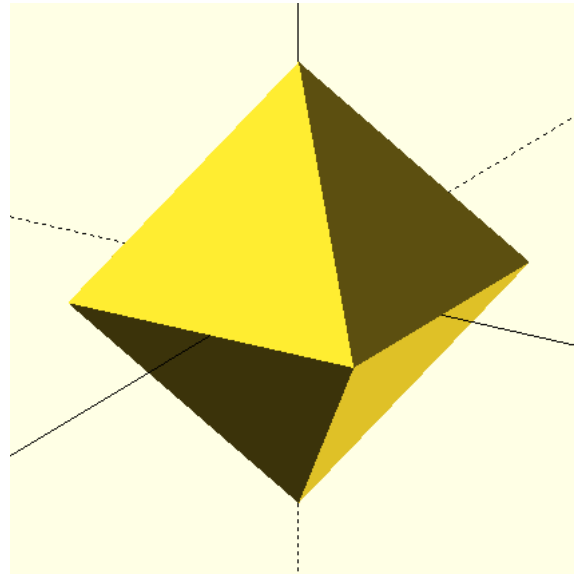


Figura 11: Octacaedro

```

aresta=10;
a=aresta;
h1=(a/2)/cos(18);
h2=(a/2)/sin(36);
h=h1+2*h2;
c1=(-1/2)*h;
c2=(-1/2)*h1;
c3=(1/2)*h1;
c4=(1/2)*h;
d=h1+h2;
polyhedron(
points=[[h2,0,c1], //0
[(1/2)*h1,h2*cos(18),c1], //1
[-h2*cos(36),(1/2)*a,c1], //2
[-h2*cos(36),(-1/2)*a,c1], //3
[(1/2)*h1,-h2*cos(18),c1], //4
[d,0,c2], //5
[(1/2)*h2,d*cos(18),c2], //6
[-d*cos(36),d*sin(36),c2], //7
[-d*cos(36),-d*sin(36),c2], //8
[(1/2)*h2,-d*cos(18),c2], //9
[-d,0,c3], //10
[(-1/2)*h2,-d*cos(18),c3], //11
[d*cos(36),-d*sin(36),c3], //12

```

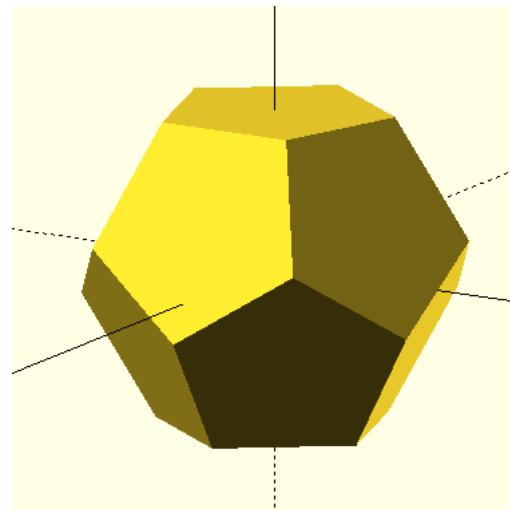


Figura 12: Dodecaedro

```
[d*cos(36),d*sin(36),c3], //13
[(-1/2)*h2,d*cos(18),c3], //14
[-h2,0,c4], //15
[(-1/2)*h1,-h2*cos(18),c4], //16
[h2*cos(36),(-1/2)*a,c4], //17
[h2*cos(36),(1/2)*a,c4], //18
[(-1/2)*h1,h2*cos(18),c4] //19
],
faces=[
[0,1,2], [0,2,3], [0,3,4],[0,5,13], [0,13,1], [1,13,6], [1,6,14],[1,14,2],
[2,14,7], [2,7,10], [2,10,3], [3,10,8],[3,8,11], [3,11,4], [4,11,9], [4,9,12],
[4,12,0], [0,12,5],[8,10,15], [8,15,16], [8,16,11],[9,11,16], [9,16,17],
[9,17,12], [5,12,17],[5,17,18], [5,18,13],[6,13,18],[6,18,19], [6,19,14],
[7,14,19],[7,19,15],[7,15,10], [15,17,16],[15,18,17],[15,19,18]]);
```

Essencialmente descrevemos os vértices do polígono no espaço com o parâmetro `poits=[[a,b,c],...]` e, em seguida, geramos as faces com `faces=[[v1,v2,v3],...]`. No parâmetro `points` entramos com as coordenadas cartesianas dos vértices e no parâmetro `faces` entramos os vetores de vértices, cujo as coordenadas identificam os vértices definidos anteriormente (marcados no código com o número após `//`). Note que nem sempre é fácil calcular as coordenadas dos vértices e é aí que é exigido o conhecimento de geometria espacial que precisa ser entendido por que se dispõe programar o desenho.

Outro objeto que estamos trabalhando é o que chamaremos aqui de *gerador de vértice* que é uma rotina para construção de arquivos gráficos para gerar conectores de montagem de esqueletos de polígonos e poliedros que possam ser impressos em plástico e usado para montagem. Estamos usando como base uma rotina de domínio público, contribuição de Sjoerd de Jong. Com esse objeto é possível gerar arquivos imprimíveis de estruturas angulares para fixação de tubos ou palitos e obter o esqueleto de um sólido geométrico.

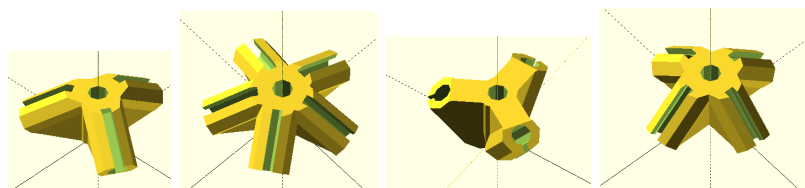


Figura 13: Vértices: cubo, icosaedro, tetraedro e octaedro

Veja abaixo na figura 14 um “vértice” de um cubo impresso e o respectivo esqueleto de cubo montado na figura 15.



Figura 14: “vértice” de montagem

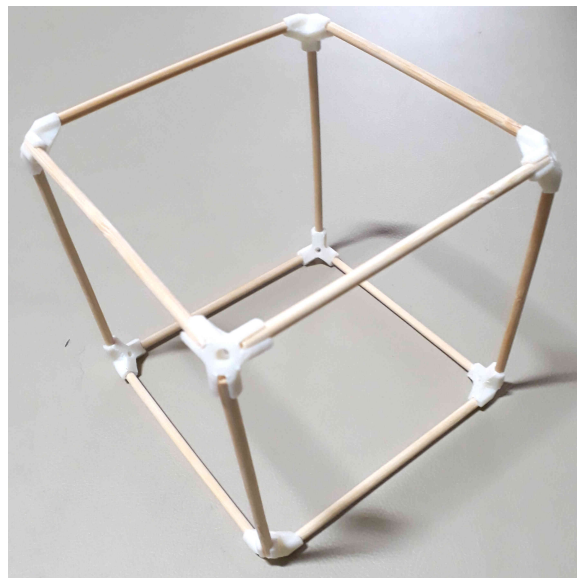


Figura 15: Esqueleto de cubo

Conclusões

O domínio do OpenSCAD parece ser um bom começo para criar modelos para uso em ambientes de ensino. O estudo aqui apresentado faz parte do trabalho de IC do segundo autor e é direcionado a unir habilidades de uso de ferramenta de CAD, conhecimento matemático por traz do funcionamento do software de desenho e conhecimento de matemática dos modelos geométricos propostos e ao final gerar rotinas de geração de objetos geométricos para uso sala de aula, de forma gráfica ou em forma física para manipulação. Aqui fizemos a abordagem de sólidos geométricos, mas há muitas outras possibilidades a serem exploradas nessa direção. Além dos modelos descritos aqui existem outros que ainda serão explorados no decorrer do projeto de IC.

Referências

- FRANCOIS, Jeremie. How to use OpenSCAD. 2014. Disponível em: <http://www.openscad.org/documentation.html>.
- GLAESE, G & STACHEL H. Open Geometry, OpenGL + Advanced Geometry. New York: Spring Verlag. 2018.
- OPENS CAD MANUAL. OpenSCAD User Manual. 2018. Disponível em https://en.wikibooks.org/wiki/OpenSCAD_User_Manual/Print_version.

Monoides e potências de expoente zero

Pedro Pablo Durand Lazo
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
ppdurandlazo@gmail.com

Resumo: Este texto tem por objetivo fazer um estudo dos Monoides como estrutura algébrica mais simples que permite um enquadramento teórico apropriado para as noções e propriedades da potenciação que se apresentam no contexto da matemática escolar elementar. Busca fazer uma leitura da Matemática com o foco na matemática escolar e seu ensino. Não proporciona uma metodologia de ensino e sim uma fundamentação sólida para o docente.

Palavras-chave: Monoide; Potenciação; Expoente zero.

1 Introdução

Se os estudantes forem convidados a analisar e dizer alguma coisa respeito da validade ou não das seguintes cadeias de igualdades:

$$1 = a^0 = a^{n-n} = a^n a^{-n} = \frac{a^n}{a^n} \quad (1)$$

$$1 = 0^0 = 0^{n-n} = 0^n 0^{-n} = 0(0^{-n}) = 0 \quad (2)$$

$$1 = 0^0 = 0^{n-n} = 0^n 0^{-n} = \frac{0^n}{0^n} = \frac{0}{0} \quad (3)$$

é possível que se percam em um mar de dúvidas. O professor deve estar o suficientemente preparado para discipar estas dúvidas.

Analisemos agora dois fragmentos que correspondem a duas edições diferentes de um texto escolar. Nestes textos se exprimem de alguma forma as questões aqui tratadas:

1. POTENCIAÇÃO EM $\mathbb{R}$

Definição 1.

Sendo a um número real e n um número inteiro maior que 1, define-se

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ fatores}} \quad [\cdots]$$

Definição 2 Sendo a um número real, define-se: $a^1 = a$ $[\cdots]$

Definição 3: Sendo a um número real, define-se: $a^0 = 1$

Exemplos

$$a) \quad 8^0 = 1 \quad b) \quad \left(\frac{7}{3}\right)^0 = 1 \quad c) \quad 0^0 = 1$$

Nota

Não há unanimidade, entre os matemáticos, quanto à adoção da definição $0^0 = 1$. Nesta obra seguiremos a orientação dos que adotam tal definição. (Paiva, 1995).

As anotações neste texto assinalam o fato da não unanimidade relativa ao valor que deve se associar à 0^0 . Declara sua adesão aos que adotam $0^0 = 1$. Nos exemplos encontramos o $0^0 = 1$.

1. POTENCIAÇÃO EM $\mathbb{R}$

Definições: Sendo a um número real e n um número inteiro tem-se

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ fatores}} \quad (se \ n \geq 1)$$
$$a^1 = a \quad a^0 = 1 \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (se \ a \neq 0)$$

Nota

Não há unanimidade entre os matemáticos quanto a adoção do valor 1 para potencia $0^0 = 1$, porém essa controvérsia não vai interferir no nosso estudo.

Exemplos [...]

$$d) \quad 5^0 = 1 \quad . \quad (\text{Paiva, 2005}).$$

A anotação neste texto observa o fato da não unanimidade relativa ao valor que deve se associar à 0^0 . Afirma que esta controversia não vai interferir o estudo. Não declara sua adesão aos que adotam $0^0 = 1$. Nos exemplos não encontramos mais a igualdade $0^0 = 1$.

Ao manter a definição, se admite obviamente que $0^0 = 1$ pois 0 é um número real. Logo há uma implícita adesão aos que afirmam que $0^0 = 1$, consequentemente, não existe motivo para não coloca-lo como exemplo.

No que segue tentaremos explicar, dentro da própria matemática, como deve-se abordar esta temática.

2 Leis de composição interna

Definição de uma lei de composição interna

Iniciaremos esta seção comentando duas definições de lei de composição interna, a primeira dada no livro de Queysanne e a segunda dada no de Bourbaki:

DEFINICIÓN.- Se llama ley de *composición interna entre elementos* de E toda aplicación de una parte A de $E \times E$ en E . Se dice entonces que E está provisto de la ley interna considerada,
Cuando $A = E \times E$ se dice que la ley está definida sobre todo E , se dice entonces que es una *operación interna sobre E* o una *ley interna sobre E* . (Queysanne, 1974, p.109).

1. LAWS OF COMPOSITION

DEFINITION 1. Let E be a set. A mapping f of $E \times E$ into E is called a law of composition on E . The value $f(x, y)$ of f for an ordered pair $(x, y) \in E \times E$ is called the composition of x and y under this law. A set with a law of composition is called a magma.

(Bourbaki, 1974, p.1).

Em Quseynne se fala primeiro de *lei de composição entre elementos* de um conjunto E . Com esta definição, por exemplo, a diferença e a divisão são leis de composição definidas *entre elementos* do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, pois se $A = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a \leq b\}$, temos que $A \mapsto \mathbb{N}; (a, b) \mapsto b - a$ é uma função. Logo define o caso em que $A = E \times E$ a qual é chamada de *lei interna sobre E* . Assim, a diferença não é uma lei interna sobre $\mathbb{N}$. De forma análoga, pode se dizer da divisão de números naturais.

Em Bourbaki, define-se *lei interna sobre* o conjunto E , desta maneira há uma coincidência em ambas definições. Porém, devemos tomar em conta que todo o discurso boubakiano trata de leis de composição definidas *sobre* E , isto é, de aquelas que são totalmente definidas em E . Por razões de caráter pedagógico seria conveniente adotar para fins do ensino, a definição dada por Queysanne.

Definition. A binary operation on a set G is a function $*$: $G \times G \mapsto G$.
(Rotman, 2003, p.51)

A definição citada anteriormente mostra que *operação binária sobre um conjunto* é equivalente a *lei de composição interna sobre um conjunto*.

Leis de composição interna associativas

3. ASSOCIATIVE LAWS

DEFINITION 5. A law of composition $(x, y) \mapsto x \top y$ on a set E is called associative if, for all elements x, y, z in E ,

$$(x \top y) \top z = x \top (y \top z).$$

A magma whose law is associative is called an associative magma. (Bourbaki, 1974, p.4)

Elemento neutro para uma Lei de composição interna

1. IDENTITY ELEMENT DEFINITION 1. Under a law of composition $\top$ on a set E an element e of E is called an identity element if, for all $x \in E$, $y \top x = x \top e = x$. (Bourbaki, 1974, p.12).

3 Monoides

O quadro teórico dentro do qual pode-se dar respostas aos questionamentos feitos na introdução de forma coerente da prespetiva matemática é a estrutura algébrica de Monoide.

A monoid is a set G , with a law of composition which is associative, and having a unit element (so that in particular, G is not empty). (Lang, 2005).

Resumindo:

Definição 1. Uma lei de composição interna, ou lei de composição, sobre um conjunto E é uma função de $E \times E$ em E , isto é, uma função $\top$ que a todo par ordenado (a, b) de elementos de E faz corresponder um único elemento c de E , chamado de composto de a e b : $\top : E \times E \mapsto E$; $(a, b) \mapsto c = a \top b$ Escrevemos $(E, \top)$ para exprimir o fato que E está munido da lei de composição $\top$.

Uma lei de composição interna $\top$ sobre um conjunto E diz-se associativa se, e somente se, $(a \top b) \top c = a \top (b \top c)$ para todo $a, b, c \in E$. Um elemento e diz-se *elemento neutro para a lei de composição* $\top$ definida sobre E , se cumpre $a \top e = e \top a = a$ para todo $a \in E$. Um *monoide* é um conjunto E munido de uma lei de composição interna que é associativa e possui elemento neutro.

3.1 Composição de uma sequência finita.

DEFINITION 3. Let E be a unital magma. The identity element of E is called the composition of the empty family of elements of E . (Boubaki, 1974, p.13).

If the sequence is the empty sequence ($n = 0$), then the composite is by definition the neutral element e . If $n > 0$ and if the composites of sequences of less than n terms are already defined, then we define $a_1 \tau a_2, \tau \cdots, \tau a_n$ by $a_1 \tau a_2, \tau \cdots, \tau a_n = (a_1 \tau a_2, \tau \cdots, \tau a_{n-1}) \tau a_n$. (Chevalley, 1956).

Seja (E, τ) um monoide e $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ uma sequência finita de elementos de E , define-se o composto, $a_1 \tau a_2, \tau \cdots, \tau a_n$, desta sequência indutivamente.

Para $n \in \mathbb{N}$ definimos: $I_n = \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}$. Observe-se que $I_0 = \emptyset$.

Denotemos por $\bigtop_{i \in I_n} a_i$ a expressão $a_1 \tau a_2, \tau \cdots \tau a_n$ e definimos:

$$\bigtop_{i \in I_0} a_i = \bigtop_{i \in \emptyset} a_i = e \quad \text{e} \quad \bigtop_{i \in I_n} a_i = \left(\bigtop_{i \in I_{n-1}} a_i \right) \tau a_n \quad (n \geq 1).$$

Caso a lei de composição seja denotada aditivamente, temos

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i \in I_n} a_i \quad \text{e definimos:}$$

$$\sum_{i \in I_0} a_i = \sum_{i=1}^0 a_i = \sum_{i \in \emptyset} a_i = \mathbf{0_E} \quad \text{e} \quad \sum_{i \in I_n} a_i = \left(\sum_{i \in I_{n-1}} a_i \right) + a_n \quad (n \geq 1)$$

onde $\mathbf{0_E}$ representa o neutro aditivo em $(E, +)$.

Caso a lei de composição seja denotada multiplicativamente, temos

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n = \prod_{i=1}^n a_i = \prod_{i \in I_n} a_i \quad \text{e definimos:}$$

$$\prod_{i \in I_0} a_i = \prod_{i=1}^0 a_i = \prod_{i \in \emptyset} a_i = \mathbf{1_E} \quad \text{e} \quad \prod_{i \in I_n} a_i = \left(\prod_{i \in I_{n-1}} a_i \right) \cdot a_n \quad (n \geq 1)$$

onde $\mathbf{1_E}$ representa o neutro multiplicativo em $(E, \times)$.

Consideremos o caso em que todos os termos da sequência $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ são iguais a um elemento a .

Definition 1.8. Let G be a semigroup, $a \in G$ and $n \in \mathbb{N}^*$. The element $a^n \in G$ is defined to be the standard n product $\prod_{i=1}^n a_i$ with $a_i = a$ for $1 \leq i \leq n$. If G is a monoid, a^0 is defined to be the identity element e . $[\cdots]$
 ADDITIVE NOTATION. If the binary operation in G is written additively, then we write na in place of a^n . Thus $0a = 0$, $1a = a$, $na = (n-1)a + a$, etc. (Hungerford, 1974).

Consider now the case where $a_1, \dots, a_n$ are all equal to one and the same element a . Then the composite of the sequence $(a_1, \dots, a_n)$ is denoted by na if the law of composition is additive, by a^n if the law of composition is multiplicative. (Chevalley, 1956).

Seja $(E, \top)$ um monoide e $\forall i \in I_n : a_i = a$, então o composto da sequência $(a_1, \dots, a_n)$ is denotado por

$$\bigtop_{i \in I_n} a_i = a_1 \top a_2 \top \dots \top a_n = a \top a \top \dots \top a = \bigtop_{i \in I_n} a \quad \text{logo} \quad \bigtop_{i \in I_0} a_i = \bigtop_{i \in \emptyset} a = e.$$

Em notação aditiva e multiplicativa, respectivamente, temos

$$\sum_{i=1}^n a = na \quad \text{e} \quad \prod_{i=1}^n a = a^n.$$

Em particular,

$$\sum_{i=1}^0 a = \sum_{i \in I_0} a = \sum_{i \in \emptyset} a = 0a = \mathbf{0}_E$$

Também,

$$\prod_{i=1}^0 a = \prod_{i \in I_0} a = \prod_{i \in \emptyset} a = a^0 = \mathbf{1}_E.$$

Deve-se observar que

1. As expresões na e a^n são só notações para exprimir o composto de uma sequência de termos iguais a um mesmo elemento a . Não deve se confundir com a multiplicação e a potenciação pois poderiam nem sequer ter sentido dependendo do conjunto E . Esta confusão é frequente quando adotando-se a notação aditiva (resp. multiplicativa) se adota o zero (resp, um) ao representar o neutro para a lei de composição.
2. O neutro aditivo $\mathbf{0}_E$ não tem que ser necessariamente o número zero (0), da mesma forma, o neutro multiplicativo $\mathbf{1}_E$ não tem que ser o número um (1).

Estas observações são importantes e permitem conceituar corretamente os objetos e deduzir de forma válida as propriedades aritméticas que dão conteúdo ao ensino da matemática escolar. Para ilustrar isto demos alguns exemplos:

Exemplo 1. Seja A , um conjunto e denotemos por $E = \mathcal{F}(A, A)$ o conjunto das funções de A em A . A função $\circ : E \times E \mapsto E; (f, g) \mapsto f \circ g$ definida por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ para todo $x \in A$. Assim, $(E, \circ)$ é um monoide. Aqui, o elemnto neutro para a lei de composição $\circ$ em E é a função $id_A : A \mapsto A; id_A(x) = x$. Com a notação da definição geral $e = id_A$.

O seguinte exemplo esta baseado na definição citada a seguir:

DÉFINITION 1.- Soit $(\mathbf{X}_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles (resp. une famille de parties d'un ensemble E). On appelle réunion de cette famille, et on désigne par $\bigcup_{i \in I} \mathbf{X}_i$ l'ensemble $\{x \mid (\exists i)(i \in \mathbf{I} \text{ et } x \in \mathbf{X}_i)\}$, c'est-à-dire l'ensemble des x qui appartiennent à un ensemble au moins de la famille $(\mathbf{X}_i)_{i \in I}$. $[\dots]$. Il est immédiat que si $\mathbf{I} = \emptyset$ on a $\bigcup_{i \in I} \mathbf{X}_i = \emptyset$, puisque la relation $(\exists i)(i \in \mathbf{I} \text{ et } x \in \mathbf{X}_i)$ est alors fausse. (Bourbaki, 1970).

Exemplo 2. Seja A , um conjunto e denotemos por $E = \mathcal{P}(A)$ o conjunto das partes de A . A função $\cup : E \times E \mapsto E; (X, Y) \mapsto X \cup Y$ definida por $\alpha \in X \cup Y \Leftrightarrow \alpha \in X \text{ ou } \alpha \in Y$. Assim, $(E, \cup)$ é um monoide. Neste caso o elemento neutro para a lei de composição $\cup$ em E é o conjunto vazio $\emptyset$. Com a notação da definição geral $e = \emptyset$. Também se $(X_i)_{i \in I}$ é uma família de partes de A , definimos $x \in \bigcup_{i \in I} X_i \Leftrightarrow \exists i \in I : x \in X_i$. Conforme a teoria precedente, $\bigcup_{i \in \emptyset} X_i = \emptyset$.

O seguinte exemplo esta baseado na definição citada a seguir:

DÉFINITION 3.- Soit $(\mathbf{X}_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un ensemble E . On appelle intersection de cette famille, et on désigne par $\bigcap_{i \in I} \mathbf{X}_i$ l'ensemble

$$\{x \mid x \in E \text{ e } (\forall i)((i \in I) \Rightarrow (x \in \mathbf{X}_i))\},$$

c'est-à-dire l'ensemble des x qui appartiennent à tous les ensembles de la famille $(\mathbf{X}_i)_{i \in I}$.

Pour une famille $(\mathbf{X}_i)_{i \in I}$ de parties de E , on a donc $(\mathbf{X}_i)_{i \in \emptyset} = E$. (Bourbaki, 1970).

Exemplo 3. Seja A , um conjunto e denotemos por $E = \mathcal{P}(A)$ o conjunto das partes de A . A função $\cap : E \times E \mapsto E; (X, Y) \mapsto X \cap Y$ definida por $\alpha \in X \cap Y \Leftrightarrow \alpha \in X \text{ e } \alpha \in Y$. Assim, $(E, \cap)$ é um monoide. Neste caso o elemento neutro para a lei de composição $\cap$ em E é o conjunto A . Com a notação da definição geral $e = A$. Também se $(X_i)_{i \in I}$ é uma família de partes de A , definimos $x \in \bigcap_{i \in I} X_i \Leftrightarrow \forall i \in I : x \in X_i$. Conforme a teoria precedente, $\bigcap_{i \in \emptyset} X_i = A$.

Nos exemplos 2 e 3 trata-se da união e da intersecção de uma família de partes de um conjunto. Como as sequências são famílias com conjunto de índices contido em $\mathbb{N}$, o exposto para famílias é válido para sequências finitas de partes de um conjunto:

$$X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n = \bigcup_{i=1}^n X_i = \bigcup_{i \in I_n} X_i \quad \bigcup_{i \in I_0} X_i = \emptyset, \quad (4)$$

$$X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n = \bigcap_{i=1}^n X_i = \bigcap_{i \in I_n} X_i \quad \bigcap_{i \in I_0} X_i = A. \quad (5)$$

Observe-se que se usarmos notação aditiva para a união, teria-se que $0X = \emptyset$. Analogamente, se usarmos notação multiplicativa para a intersecção teríamos $X^0 = A$. Deve-se observar também que tanto a união como a intersecção da família vazia de partes do conjunto E , como sendo $\emptyset$ e E , respectivamente, não são definições por separado e sim consequências das definições.

Exemplo 4. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. A adição de números reais $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; (a, b) \mapsto a + b$ é uma lei de composição interna em $\mathbb{R}$. Assim, $(\mathbb{R}, +)$ é um monoide. Neste caso o elemento neutro para a lei de composição $+$ em $\mathbb{R}$ é o número real 0. Com a notação da definição geral $e = 0$. Também se $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$, então $\sum_{i=1}^n a = na$ e para $n = 0$ tem-se

$\sum_{i=1}^0 a = 0a = 0$, em particular para $a=0$, cumpre-se $00 = 0$. Note que aqui o zero da esquerda é um número natural e o da direita é um número real. Não se trata propriamente do produto de números reais, senão, a soma de uma sequência de termo constante zero e cujo conjunto de índices é vazio.

Exemplo 5. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. A multiplicação de números reais $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; (a, b) \mapsto ab$ ($= a \times b = a \cdot b$) é uma lei de composição interna em $\mathbb{R}$. Assim, $(\mathbb{R}, \times)$ é um monoide. Neste caso o elemento neutro para a multiplicação (lei de composição) $\times$ em $\mathbb{R}$ é o número real 1. Com a notação da definição geral $e = 1$. Também, se $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$, então $\prod_{i=1}^n a = a^n$ e para $n = 0$ tem-se $\prod_{i=1}^0 a = a^0 = 1$, em particular para $a=0$, cumpre-se $0^0 = 1$. Não se trata propriamente da potenciação de números reais, mais, do produto de uma sequência de termo constante zero que tem conjunto de índices vazio.

Observe-se que $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{R}, \times)$ são monoides, porém, não há ainda uma ligação entre as duas leis de composição. Deve sempre se tomar em conta como referencial tanto o conjunto ao qual pertencem os objetos, como a lei de composição nele definida. Assim, por exemplo se ligamos as duas leis de composição definidas no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, pela chamada propriedade distributiva:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a + b)c = ac + bc$$

Podemos provar aqui, de forma não muito rigorosa, só com a intenção de ilustrar, que,

$$\text{para todo número real } a, : 0 \cdot a = 0$$

$$0 + 0 \cdot a = 0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a \Rightarrow 0 = 0 \cdot a$$

De forma particular quando $a = 0$, temos $0 \cdot 0 = 0$. Podemos ver que em $(\mathbb{R}, +)$, $0 \cdot a = 0$ é uma definição, em tanto que em $(\mathbb{R}, +, \times)$ uma propriedade que se prova e exprime sim o produto de dois números reais.

Fazendo $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{ 0 \}$. Observe-se que $(\mathbb{R}^*, \times)$ es também um monoide e seu elemento neutro é 1. Aqui, para todo real $a \neq 0 : a^0 = 1$. Porém 0^0 não tem sentido, pois 0 não é elemento do conjunto $\mathbb{R}^*$. Lembre-se que na expressão a^n , a é elemento do conjunto $\mathbb{R}^*$ e n é um número natural.

Para estabelecer relações entre a soma e a multiplicação de números naturais com a lei de composição $\top$ que faz do conjunto E um monoide, precisa-se do Teorema Geral de Associatividade cujo enunciado e prova pode encontrar-se em (Chevalley, 1956).

Theorem 2.(General associativity theorem) Let $(a_1, \dots, a_n)$ be a sequence of elements of A . Let $k_1, \dots, k_h$ be integers such that $1 = k_1 \leq \dots \leq k_h \leq n$. Let $b_1 = a_1 \tau \dots \tau a_{k_2-1}, b_2 = a_{k_2} \tau \dots \tau a_{k_3-1}, \dots, b_h = a_h \tau \dots \tau a_n$. Then we have $a_i \tau \dots \tau a_n = b_1 \tau \dots \tau b_h$. (Chevalley, 1956).

Se $(E, \top)$, $(E, +)$, $(E, \cdot)$, representam monoides em notação genérica, aditiva e multiplicativa, respectivamente, se $a \in E$ e $\forall i \in I_n : a_i = a$, então

$$\bigtop_{i \in I_n} a_i = a_1 \top a_2 \top \dots \top a_n = a \top a \top \dots \top a = \bigtop_{i \in I_n} a \quad (6)$$

$$\bigtop_{i \in I_0} a_i = \bigtop_{i \in \emptyset} a = e \quad \bigtop_{i \in I_1} a = a \quad (7)$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = a + a + \dots + a = \sum_{i \in I_n} a = na \quad (8)$$

$$\sum_{i \in I_0} = 0a = \mathbf{0}_E \quad \sum_{i \in I_1} a = 1a = a \quad (9)$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a = \prod_{i \in I_n} a = a^n \quad (10)$$

$$\prod_{i \in I_0} a = a^0 = \mathbf{1}_E \quad \prod_{i \in I_1} a = a^1 = a \quad (11)$$

Let m and n be non-negative integers, and a an element of A . If the law of composition is additive, then we have

$$(1) \quad 0a = 0, \quad 1a = a, \quad (m+n)a = ma + na, \quad (mn)a = m(na)$$

if the law of composition is multiplicative, we have

$$(2) \quad a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad a^{m+n} = a^m a^n, \quad a^{mn} = (a^m)^n.$$

These formulas follow easily from the definitions and from the general associativity theorem. (Chevalley, 1956).

De pose do *Teorema Geral de Associatividade* pode-se estabelecer as seguintes relações: Para $m, n \in \mathbb{N}$ e para $a \in E$. temos:

$$\left(\bigcap_{i \in I_n} a \right) \cap \left(\bigcap_{i \in I_m} a \right) = \bigcap_{i \in I_{n+m}} a \quad \bigcap_{i \in I_m} \left(\bigcap_{i \in I_n} a \right) = \bigcap_{i \in I_{mn}} a, \quad (12)$$

$$\left(\sum_{i \in I_m} a \right) + \left(\sum_{i \in I_n} a \right) = \sum_{i \in I_{m+n}} a \quad \sum_{i \in I_m} \left(\sum_{i \in I_n} a \right) = \sum_{i \in I_{mn}} a, \quad (13)$$

$$\left(\prod_{i \in I_m} a \right) \cdot \left(\prod_{i \in I_n} a \right) = \prod_{i \in I_{m+n}} a \quad \prod_{i \in I_m} \left(\prod_{i \in I_n} a \right) = \prod_{i \in I_{mn}} a. \quad (14)$$

Em notação mais sintética as igualdades (9), (11), (13) e (14) escrevem-se:

$$0a = 0_E, \quad 1a = a, \quad ma + na = (m+n)a, \quad m(na) = (mn)a \quad (15)$$

$$a^0 = 1_E, \quad a^1 = a, \quad a^m a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}. \quad (16)$$

Enfatizando a escrita o elemento neutro do monoide para diferenciá-lo do número inteiro, temos

$$0 \cdot a = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad a^0 = \mathbf{1},$$

no caso em que não exista confusão ou se o monoide seja um conjunto de números para o qual a notação corresponde realmente a la lei de composição definida em tal conjunto, isto é, quando a notação aditiva (resp. multiplicativa) denota realmente a adição (resp. multiplicação) de números de um tal conjunto, escreve-se:

$$0 \cdot a = 0 \quad \text{e} \quad a^0 = 1.$$

4 Monoides e Matemática Escolar

Analizemos a potência de expoente zero no contexto da matemática que se desenvolve na escola. Denotando por $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Consideremos a adição sobre este conjunto: $(\mathbb{N}, +)$. Registremos o fato de que $(\mathbb{N}, +)$ é um monoide com elemento neutro 0. Definimos para todo número natural a e para todo numero natural $n \geq 1$:

$$1 \cdot a = a \quad na = (n-1)a + a = \underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ somandos}} \quad (n \geq 2).$$

Nesta definição torna-se necessária a definição em separado de $1 \cdot a$, pois sendo a soma uma lei de composição, ela requer pelo menos dois números, não teria sentido somar só um número. Para $a = 0$, tem-se que $1 \cdot 0 = 0$ e para $n \geq 2$, $n \cdot 0 = 0$. Pode observa-se que $0 \cdot a$ não faz sentido, pois “0 vezes a como somando”, carece de sentido intuitivo. Novamente, deve-se definir separadamente $0 \cdot a$, mas que valor atribuir-lhe?. Se, por este processo estamos definindo a multiplicação de números naturais: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N} : (a, b) \mapsto a \cdot b$. O composto $0 \cdot 0$ deve ser único e, assim, 0 é o melhor candidato a ser o valor de $0 \cdot a$. Completamos, desta forma a definição:

$$0 \cdot a = 0 \quad 1 \cdot a = a \quad n \cdot a = (n-1) \cdot a + a \quad (n \geq 2).$$

Como $0 + a = 0 \cdot a + a = (1-1)a + a = a$, temos que $1 \cdot a = (1-1) \cdot a + a = a$ e a definição ficaria completa definido da seguinte maneira:

$$0 \cdot a = 0 \quad n \cdot a = (n-1) \cdot a + a \quad (n \geq 1).$$

Assim, enquadra-se no marco da teoria matemática geral exposta na seção anterior, onde

$$\prod_{i \in \emptyset} a = \prod_{i \in \emptyset} a = e \quad \prod_{i \in \emptyset}^n a = \left(\prod_{i \in \emptyset}^{n-1} a \right) \tau a, \quad \text{com} \quad \tau = + \quad e \quad e = 0.$$

Examinemos a seguir a multiplicação de números naturais: $(\mathbb{N}, \times)$. Registremos o fato que $(\mathbb{N}, \times)$ é um monoide com elemento neutro 1. Se definimos para todo número natural a e para todo número natural $n \geq 1$:

$$a^1 = a \quad a^n = a^{n-1}a = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fatores}} \quad (n \geq 2).$$

Nesta definição torna-se necessária a definição em separado de a^1 , pois sendo a multiplicação uma lei de composição, ela requer pelo menos dois números, não teria sentido multiplicar só um número. Para $a = 0$, tem-se que $0^1 = 0$ e para $n \geq 2$, $0^n = 0$. Pode observa-se que a^0 não faz sentido, pois “0 vezes a como fator”, carece de sentido intuitivo. Novamente, deve-se definir separadamente a^0 , mas que valor atribuir-lhe?. Temos $a^1 = a = 1 \cdot a$, se queremos que esta igualdade que é válida, seja compatível com o fato que 1 é o neutro da multiplicação, tendemos que atribuir o valor 1 a a^0 . Sendo assim, temos:

$$a^0 = 1 \quad a^1 = a \quad a^n = a^{n-1}a \quad (n \geq 2).$$

Como $1a = a = a^0a = a$, temos que $a^1 = a^{1-1}a = 1 \cdot a = a$ e a definição ficaria completa definido da seguinte maneira:

$$a^0 = 1 \quad a^n = a^{n-1} \cdot a \quad (n \geq 1).$$

Assim, enquadra-se no marco da teoria matemática geral exposta na seção anterior, onde

$$\prod_{i \in \emptyset} a = \prod_{i \in \emptyset} a = e \quad \prod_{i \in \emptyset}^n a = \left(\prod_{i \in \emptyset}^{n-1} a \right) \tau a, \quad \text{com} \quad \tau = \times \quad e \quad e = 1.$$

Aplicando a definição para $a = 0$, temos $0^1 = 0^0 \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0$. Assim, não existe motivo algum para não escrever $0^0 = 1$ e afirmar que esta afirmação é verdadeira.

Logo segue-se o indicado por Queysanne que descreve de forma sintética o processo de construção dos conjuntos que, contendo $\mathbb{N}$, prolongam as operações conservando suas propriedades e, que se apresenta na seguinte citação textual:

38. Conclusión

Qualquiera que sea la pareja (a, b) de enteros naturales (excepto la pareja $(0, 0)$ para la exponencial), hemos definido tres operaciones que tienen resultados respectivos

$$a + b, \quad ab, \quad a^b,$$

pero la ecuaciones

$$\begin{array}{ll} (1) & b + x = a \\ (3) & b^x = a \end{array} \quad \begin{array}{ll} (2) & b \neq 0 \quad bx = a \\ (3') & x^b = a \end{array}$$

no tienen siempre soluciones en $\mathbb{N}$, para (1) y (2) la condición de existencia y de unicidad de x es, respectivamente, $b \leq a$ y $b|a$.

Uno de los fines de algunos estudios de los capítulos siguientes será construir conjuntos conteniendo $\mathbb{N}$ y en los que estas ecuaciones tendrán siempre soluciones: para (1) éste será $\mathbb{Z}$, para (2) éste será $\mathbb{Q}$, para (3) y (3') lo será $\mathbb{R}$.

Además, (1) tendrá soluciones en $\mathbb{Z}$ incluso si a y b no se toman en $\mathbb{N}$ sino en $\mathbb{Z}$; análogamente, (2) tendrá siempre soluciones en $\mathbb{Q}$, al tomar a y b en $\mathbb{Q}$ ($b \neq 0$).

Por el contrario si queremos dar un sentido a la ecuación (3) para a y b reales, será necesario suponer a y b estrictamente positivos. En fin, para resolver ciertas ecuaciones (3') tales como $x^2 = -1$, nos veremos obligados a introducir un nuevo conjunto $\mathbb{C}$, conjunto de los números complejos.

Cada conjunto introducido en el orden indicado será un superconjunto del precedente

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Sobre estos conjuntos se definirán una suma, una multiplicación, que prolongan las operaciones ya definidas sobre el o los conjuntos anteriores. (Queysanne, 1974)

No relativo ao 0^0 e as controvérsias anotadas por Paiva parecem derimidas definitivamente, após uma leitura atenta do seguinte parágrafo extraído do livro de Boubaki:

If $(x_\alpha)_{\alpha \in \emptyset}$, is the empty family of elements of E its composition e is also denoted by $\prod_{\alpha \in \emptyset} x_\alpha$ For example, we write

$$\prod_{q \leq i \leq p} x_i = e$$

when $p < q$ ($p, q \in \mathbb{N}$). Similarly we write $\prod^0 x = e$ for arbitrary x . With these definitions Theorems 1 and 3 of §1 remain true if the hypothesis that the sets A and B , are non-empty is suppressed. Similarly the formulae

$$\prod^{m+n} x = \left(\prod^m x \right) \tau \left(\prod^n x \right) \text{ and } \prod^{mn} x = \left(\prod^m \left(\prod^n x \right) \right) \text{ are then true for } m \geq 0, n \geq 0. \text{ (Bourbaki, 1974, p.15)}$$

Destaquemos aqui a frase: “we write $\prod^0 x = e$ for arbitrary x ” (para qualquer x) contida no texto citado, permite afirmar que $0^0 = 1$ pues o referencial no que dá a definição é $\mathbb{R}$ munido da multiplicação e, sendo assim, é um monoide que tem 1 como elemento neutro.

Para estender os expoentes naturais aos números inteiros deve introduzir-se os conceitos de elementos inversíveis e de grupo. Isto é dado na citação abaixo.

3. INVERTIBLE ELEMENTS

DEFINITION 6. Let E be a unital magma, τ its law of composition, e its identity element and x and x' two elements of E . x' is called a left inverse (resp. right inverse, resp. inverse) of x if $x' \tau x = e$ (resp. $x \tau x' = e$, resp. $x' \tau x = x \tau x' = e$). An element x of E is called left invertible (resp. right invertible, resp. invertible) if it has a left inverse (resp. right inverse, resp. inverse).

A monoid all of whose elements are invertible is called a group. (Bourbaki, 1974, p.15).

Quando todos os elementos são invertíveis, isto é, quando o monoide é um grupo, se estendem as potências de expoentes naturais à potências de expoentes inteiros,

(b) Let E be a monoid written multiplicatively. For $n \in \mathbb{Z}$ the notation $\overset{n}{\top} x$ is replaced by x^n . We have the relations

$$x^{m+n} = x^m \cdot x^n, \quad x^0 = 1, \quad x^1 = x, \quad (x^m)^n = x^{mn}$$

and also $(xy)^n = x^n \cdot y^n$ if x and y commute.

When x has an inverse, this is precisely x^{-1} . The notation $\frac{1}{x}$ is also used instead of x^{-1} . Finally, when the monoid E is commutative, $\frac{x}{y}$ or x/y is also use for xy^{-1} . (Bourbaki, 1974, p.24).

Definition. If G is a group and if $a \in G$, define the powers a^n , for $n \geq 1$, inductively:

$$a^1 = a \text{ and } a^{n+1} = aa^n.$$

Define $a^0 = 1$ and, if n is a positive integer, define $a^{-n} = (a^{-1})^n$. (Rotman, 2003, p.55).

$(\mathbb{R}, \times)$ não é um grupo pois 0 não tem inverso multiplicativo. Suponhamos que 0 tenha innverso multiplicativo, teríamos: $0 \cdot 0^{-1} = 1$. Lembre que $(\mathbb{R}, +)$ é um monoide que tem 0 como elemento neutro e, sendo assim, para todo número real x : $0 \cdot x = 0$. Caso contrário, se $0^{-1} \in \mathbb{R}$ teríamos $0 \cdot 0^{-1} = 0$. Donde $1 = 0$!!!!. Isto justifica o fato de definir para todo número real $x \neq 0$: $x^{-n} = (x^{-1})^n$. Obtende-se assim as propriedades das potências com expoentes inteiros. $(\mathbb{R}, \times)$ é um monoide onde 0 não tem inverso, logo a definição $x^{-n} = (x^{-1})^n$ não se aplica a 0, mas a definição $a^0 = 1$ vale para todo número real, em particular para $a = 0$, isto é, $0^0 = 1$; Assim, por exemplo, a potência 0^{-2} não está definida, pois 0 não tem inverso. Não tem sentido escrever 0^{-n} quando $n \neq 0$. Mas isto não se contrapõe ao fato de que $0^0 = 1$. Desta maneira a extensão a potências de expoente inteiro se dá em $(\mathbb{R}, \times)$ como monoide.

$(\mathbb{R}, +)$ é um grupo, pois é monoide com todos seus elementos invertíveis. Para todo número real a existe um número real denotado $-a$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$. Definindo para $n \in \mathbb{N}$, $(-n)a = n(-a)$, obtemos todas as propriedades dadas anteriormente com $n \in \mathbb{Z}$.

Finalmente, de pose deste quadro teórico que nos proporciona o estudo das estruturas algébricas, neste trabalho sobre Monoide, permite dar respota as questões formuladas na introdução. Isto justifica a presença das disciplinas de Álgebra nos currículos dos cursos de formação de Professores de Matemática.

Agradecimentos

Devo registrar meu profundo agradecimento ao Professor Clezio Aparecido Braga pelas observações feitas nas diferentes oportunidades em que falamos sobre o tema e pela leitura do manuscrito. Um tempo, doado generosamente, muito difícil de repor.

Referências

BOURBAKI N.

Éléments de Mathématique. Théorie des Ensembles. Paris: Diffusion C.C.L.S.,1970. 349 p.

Elements of Mathematics. Algebra I. Chapters 1-3. Great Britain: Addison-Wesley Publishing Company,1974. 709 p.

CHEVALLEY C. **Fundamental Concepts of Algebra.** New York: Academic Press Inc Publishers, 1956.

HUNGERFORD, T. W. **Algebra.** New York: Springer-Verlag Inc, 1974. 502 p.

LANG, S. **Algebra.** Rev. 3 ed.(Graduate texts in mathematics; 211). New York: Springer, 2002 (corrected printing 2005). 923 p.

PAIVA, M.

Matemática. Volume único 1 ed. São Paulo: Editora Moderna, 2005. 491 p.

Matemática. v 1 2 ed. São Paulo: Editora Moderna, 1995. 583 p.

QUEYSANNE, M. **Álgebra Básica.** Barcelona: Editorial Vicens Vives, 1974. 669 p.

ROTMAN, J. J. **Advanced Modern Algebra.** 1st edition (2002); 2nd printing (2003) New Jersey: Prentice Hall, 2002. 1040 p.

Polinômios e Funções Polinomiais

Pedro Pablo Durand Lazo
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
ppdurandlazo@gmail.com

Resumo: O presente trabalho faz uma leitura crítica dos Polinômios e as Funções Polinomiais com a finalidade de obter um enquadramento teórico apropriado que oriente o ensino desses conceitos na matemática escolar. Objetiva fazer uma leitura da Matemática focada na matemática escolar e seu ensino. Não proporciona uma metodologia de ensino e sim uma tentativa de fundamentação sólida para o docente.

Palavras-chave: Anel; Polinômio; Função Polinomial.

1 Introdução

Iniciemos esta seção com os conceitos de *expressões algébricas e polinômios* dados num texto para o 8º ano da escola

Expressões contendo letras

Iniciamos o estudo da Álgebra no 7º ano. Você deve se lembrar que na resolução de muitos problemas, recorreremos às letras para representar números e escrever simbolicamente expressões matemáticas. Construímos, assim, as chamadas *expressões algébricas* [...]. Para ser chamada de monômio a expressão algébrica deve representar apenas multiplicação de números e letras [...]. Polinômio é soma algébrica de monômios. **Polinômio com uma variável** [...] Observe,

$$A = 4x + 3 \quad [\dots] \quad C = 3x + x^3 - 4 + 2x^2 \quad [\dots]$$

Todos eses são polinômios com uma só variável, a variável x . (Iezzi, 2009, p158-165)

Frequentemente nos textos de matemática escolar se usa de forma indistinta os termos *polinômio* e *função polinomial* como se tratando de um mesmo objeto. Isto não só se dá no contexto da escola, também acontece em alguns textos de matemática. Tentaremos nos esclarecer se os termos polinômio e função polinomial designam um mesmo objeto ou se existem substantivas diferenças que obrigariam a um tratamento mais cuidadoso quando usados no ensino de matemática na escola. Para ilustrar este fato citamos textualmente duas definições dadas no contexto da matemática escolar:

2 Polinômio com uma variável

Polinômio complexo de variável complexa x é toda expressão $P(x)$ que pode ser apresentada sob a forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

em que $\{a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0\} \subset \mathbb{C}$, $\{n, n-1, n-2, \dots, 1, 0\} \subset \mathbb{N}$ e a variável x pode assumir qualquer valor complexo. (Paiva, 2013, p.166).

No texto acima citado define-se *polinômio com uma variável*. Assim, devemos pensar de início que os polinômios possuem variáveis. Em matemática o termo variável é usado na descrição das funções, por exemplo, quando se diz *seja a função f de valor real e variável real* em clara alusão à função $f : A \mapsto \mathbb{R}$ com $A \subset \mathbb{R}$. Desta maneira o termo **polinômio complexo de variável complexa** designa uma **função** que se descreve nas linhas seguintes do texto citado.

Deixando para depois a determinação do termo conveniente para designar o objeto, podemos descrevê-lo da seguinte maneira:

$$P : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}, z \mapsto P(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n$$

onde, para todo $k \in \{i \in \mathbb{N} : 0 \leq i \leq n\} : a_k \in \mathbb{C}$

Mesmo sendo indiferente usar z ou x para denotar a variável complexa, é costume, no contexto das funções de variável complexa, usar z para este fim e deixar x e y para denotar a parte real e a parte imaginária, respectivamente, do complexo: $z = x + iy$.

1.1 Função polinomial ou polinômio

Você já estudou funções polinomiais de domínio real. Agora vamos estudar essas funções para o domínio complexo.

Polinômio ou função polinomial na variável complexa x é toda função

$$P : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C} \text{ definida por } P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0$$

para todo $x \in \mathbb{C}$, sendo $n \in \mathbb{N}$ e $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ números complexos.

Os números complexos $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ são os **coeficientes** do polinômio $P(x)$. Os monômios $a_nx^n, a_{n-1}x^{n-1}, \dots, a_2x^2, a_1x, a_0$ são os **termos** do polinômio, sendo a_0 o **termo independente**. Temos, também, que

- um polinômio é **constante** se os coeficientes $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1$ são iguais a zero
- o polinômio **nulo** ou **identicamente nulo** é um caso particular de polinômio constante, no qual a_0 também é igual a zero.

(Conexões com a Matemática, v.3, p.185).

No texto precedente *polinômio* e *função polinomial* são exatamente a mesma coisa. Enquanto um autor designa de polinômio o que, sem mencioná-lo, define como sendo uma função, outro declara os ambos termos como sinônimos. Assim, poderíamos chamar **polinômio** a **função** cuja definição é dada logo no texto supracitado.

9. Polynomial Rings. Very early in our mathematical education -in fact in junior high school itself- we are introduced to polynomials. For a seemingly endless amount of time we are drilled to the point of utter boredom, in factoring them, dividing them, simplifying them. Facility in factoring a quadratic becomes confused with genuine mathematical talent.

Later, at the beginning college level, polynomials make their appearance in a somewhat different setting. Now they are functions, taking on values, and we become concerned with their continuity. their derivatives, their integrals. their maxima and minima.

We too shall be interested in polynomials but from neither of the above viewpoint. To us polynomials will simply be elements of a certain ring and we shall be concerned algebraic properties of this ring. [...] (Herstein, 1964, p114)

No texto anterior, extraído de um livro clássico de Álgebra, Herstein, nos relata acerca da forma como, nos diferentes cenários escolares, se usa o termo **polinômio**, começando pelos níveis

elementares (high school), passando pelos medios (college) até os mais elevados (onde está destinado o livro). Descreve o significado e a orientação dada em cada um destes níveis. No primeiro corresponde à manipulação de expressões (polinomiais) durante uma quantidade aparentemente sem fim de tempo, até o tédio total, fatorando, dividendo e simplificando estas expressões. No segundo é tratado como funções, assumem valores e nos preocupamos com sua continuidade, suas derivadas, suas integrais, seus máximos e mínimos. Finalmente, no terceiro, o interesse dirige-se a focá-los de forma diferente dos pontos de vista acima. Neste nível, os *polinômios* serão simplesmente elementos de um certo anel e objetiva-se estudar as propriedades algébricas deste anel.

Em resumo, temos, em correspondência com os níveis de escolaridade, (1) Polinômios como expressões, (2) Polinômios como funções e (3) Polinômios como elementos de um certo anel.

Um anel é definido como um conjunto A com duas leis de composição interna, uma adição $x + y$ e uma multiplicação $x \cdot y$ (ou xy) de elementos x e y de A . Nas expressões que envolvem ambas leis, somas e produtos, os produtos devem ser efetuadas primeiro. Por exemplo, $x \cdot z + y \cdot z$ é calculado como $(x \cdot z) + (y \cdot z)$, e não assim $x(z + y)z$. Diz-se que a multiplicação é mais forte que a adição. Quando se diz A *munido de uma adição*, se está dizendo que A *está munido de uma lei de composição que denotaremos aditivamente*. Nem sempre esta lei é a adição no sentido usual. Analogamente, para a multiplicação.

Enuncemos a seguir a definição de anel dada por Smith:

DEFINITION 6.1 (Distributive laws, unital and nonunital rings.)

Suppose that a set R carries a (commutative) additive group structure $(R, +, 0)$ and a multiplicative semigroup structure $(R, \cdot)$.

(a) The combined structure $(R, +, \cdot)$ is said to satisfy the right distributive law if

$$(x + y) \cdot r = x \cdot r + y \cdot r \quad (6.1)$$

for all x, y, r in R .

(b) The structure $(R, +, \cdot)$ is said to satisfy the left distributive law if

$$r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y \quad (6.2)$$

for all x, y, r in R .

(c) The structure $(R, +, \cdot)$ is said to be a (nonunital) ring if it satisfies both the right and left distributive laws.

(d) A ring $(R, +, \cdot)$ is said to be a (unital) ring if it forms a monoid $(R, \cdot, 1)$ under multiplication.

(e) A ring $(R, +, \cdot)$ is said to be commutative if the semigroup $(R, \cdot)$ is commutative. (Smith, 2009, p.127-128).

De forma algo diferente, temos que Bourbaki define anel da seguinte maneira:

1. RINGS

DEFINITION 1. A ring is a set $\mathbf{A}$ with **two** laws of composition called respectively addition and multiplication, satisfying the following axiom:

(AN I) Under addition $\mathbf{A}$ is a commutative group.

(AN II) Multiplication is associative and possesses an identity element.

(AN III) Multiplication is distributive with respect to addition.

The ring $\mathbf{A}$ is said to be commutative if its multiplication is commutative. (Bourbaki, 1974, p.96).

Observe-se que um anel segundo Bourbaki é o que para Smith seria um anel unitário. Na

definição dada por Bourbaki, a existência de elemento neutro para a multiplicação (unidade), é parte da definição de anel.

Definição 1. Um conjunto A munido de uma adição e uma multiplicação $(A, +, \cdot)$ é um anel se

1. $(A, +)$ é um grupo comutativo:

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= (a + b) + c \quad \text{para todo } a, b, c \in A \\ \text{existe } 0 \in A \text{ tal que } a + 0 &= 0 + a = a \quad \text{para todo } a \in A \\ \text{para todo } a \in A \text{ existe } (-a) \in A \text{ tal que } a + (-a) &= (-a) + a = 0 \\ a + b &= b + a \quad \text{para todo } a, b \in A \end{aligned}$$

2. A multiplicação é associativa:

$$a(bc) = (ab)c \quad \text{para todo } a, b, c \in A$$

3. A multiplicação é distributiva à direita e à esquerda com respeito da adição:

$$a(b + c) = ab + ac \quad \text{e} \quad (b + c)a = ba + ca \quad \text{para todo } a, b, c \in A$$

Definição 2. Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Diz-se que é um anel comutativo se $(A, \cdot)$ é comutativo:

$$ab = ba \quad \text{para todo } a, b \in A$$

Diz-se que é um anel unitário se $(A, \cdot)$ tem elemento neutro (unidade):

$$\text{existe } 1 \in A \text{ tal que } a1 = 1a = a \quad \text{para todo } a \in A$$

Ilustraremos este conceito com exemplos que são temas contidos na matemática escolar:

Exemplo 1. Anel dos inteiros

O conjunto de números inteiros munido da adição e multiplicação usuais $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ é um anel comutativo, unitário. Note que a lei distributiva a direita $(m + n)r = mr + nr$ se reduz à Lei dos Expoentes no grupo aditivo $(\mathbb{Z}, +, 0)$.

Exemplo 2. Anel dos reais

O conjunto dos números reais munido da adição e multiplicação usuais $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ é um anel comutativo, unitário.

Exemplo 3. Anel dos inteiros módulo n

Seja n um inteiro positivo. O conjunto $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/n$ de inteiros módulo n com a adição e multiplicação modulares, $(\mathbb{Z}/n, +, \cdot)$, é um anel comutativo unitário

PROPOSITION 6.13 (Generalized distributive law.) Let x_i and y_i be elements of a ring R , for $i = 1, 2, \dots$. Then

$$\left(\sum_{i=1}^m x_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j \quad (6.9)$$

for natural numbers m and n .

COROLLARY 6.14 Let x and y be elements of a ring $(R, +, \cdot)$. Then for integers m and n ,

$$(mx) \cdot (ny) = (mn)xy. \quad (6.10)$$

2 Anel de polinômios sobre um anel

Comentaremos algumas definições de *polinômio em uma indeterminada com coeficientes em um anel* A como elementos de um conjunto $A[X]$ que por sua vez possui também uma estrutura de anel.

Let F be a field. By the *ring of polynomials* in the indeterminate, x , written as $F[x]$, we mean the set of all symbols $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, where n can be nonnegative integer and where the *coefficients* $a_0, a_1, \dots, a_n$ are all in F . [...] We could avoid the phrase “the set of all symbols” used above by introducing an appropriate apparatus of sequences but it seems more desirable to follow a path which is somewhat familiar to most readers. (Herstein, 1964, p114)

Na definição de $F[x]$, dada acima por Herstein, F é um corpo, mas os corpos são anéis, assim não há uma sustancial diferença, de momento, com as outras definições aqui apresentadas. Nesta definição, **polinômio** é um **símbolo**. Fica claro que para construir ou escrever este símbolo usamos os elementos do corpo F e a indeterminada x . Colocado assim, adquire uma existência formal: *polinômio é um símbolo da forma $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ com coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n \in F$* . Pouco mais adiante o próprio Herstein comenta que pode se evitar falar de símbolo dando uma definição mais precisa de $F[x]$ usando sequências.

Na definição a seguir, dada no livro de a Smith, se caracteriza a indeterminada X como um símbolo que não guarda relação alguma com qualquer elemento do anel, por tanto não é um elemento do anel R . Define **polinômio sobre R em uma indeterminada X** como uma **expressão da forma** $p(X) = p_nX^n + p_{n-1}X^{n-1} + \cdots + p_2X^2 + p_1X + p_0$, com $n \in \mathbb{N}$ e $p_n, p_{n-1}, \dots, p_2, p_1, p_0 \in R$.

6.7 Polynomial rings

Let R be a ring. An indeterminate X (over R) is a symbol that is not related to any element of R . A polynomial over R in an indeterminate X is an expression of the form

$$p(X) = p_nX^n + p_{n-1}X^{n-1} + \cdots + p_2X^2 + p_1X + p_0. \quad (6.18)$$

Here n is a natural number, while $p_n, p_{n-1}, \dots, p_2, p_1, p_0$ are elements of R known as the coefficients of the polynomial $p(X)$. Specifically, p_i (for $0 \leq i \leq n$) is called the coefficient of X^i in $p(X)$. The individual summands p_iX^i in (6.18) are called the terms of the polynomial. (The final summand p_0 may be written as p_0X^0 .) If R is unital, a term $1X^i$ may be written just as X^i . If a coefficient p_i happens to be zero, then the term p_iX^i need not be written explicitly. For example, $1X^2 + 1$ and $X^2 + 2X + 1$ denote the same polynomial if R is the ring of integers modulo 2.

Continuing this convention, two polynomials, say $p(X)$ as in (6.18) and

$$q(X) = q_mX^m + \cdots + q_1X + q_0, \quad (6.19)$$

are defined to be equal if

$$p_r = q_r, p_{r-1} = q_{r-1}, \dots, p_2 = q_2, p_1 = q_1, p_0 = q_0$$

for $r = \min(m, n)$ and $p_i = 0, q_i = 0$ for $i > r$. (This is the process of equating coefficients.) (Smith, 2009, p.140-141)

Assim como Herstein, Smith, dá a *polinômio* uma natureza puramente simbólica ao dizer que é uma *expressão da forma* que é dada no texto. Porém, quando define a igualdade de polinômios se deixa perceber a igualdade de sequências. Também a própria notação dos coeficientes, fazendo uso de índices, deixa transluzir a presença das sequências que, segundo Herstein, permitem definir com mais precisão os polinômios.

THEOREM 6.36 Let R be a ring, and let X be an indeterminate.

(a) The set $R[X]$ of polynomials over R in an indeterminate X forms a ring with componentwise additive group structure, and with the multiplication (6.20).

(b) The ring $(R, +, \cdot)$ is a subring of $(R[X], +, \cdot)$, namely the subring of constant polynomials.

(c) If R is unital, then the ring $(R[X], +, \cdot)$ is unital, with identity element given by the constant polynomial 1. (Smith, 2009, p.143)

DEFINITION 6.37 (The ring of polynomials.) The ring $(R[X], +, \cdot)$ of Theorem 6.36 is called the polynomial ring or ring of polynomials over R in the indeterminate X . (Smith, 2009, p.144)

O Teorema e a definição supracitados completam a informação de que o conjunto dos polinômios em uma indeterminada sobre o anel (com coeficientes no anel) com as operações lá definidas constituem também um anel.

Os *polinômios como sequências com termos no anel*, que segundo Herstein permitem uma definição mais precisa, os encontramos no enunciado do Teorema a seguir no livro de Hungerford:

Theorem 5.1. Let R be a ring and let $R[x]$ denote the set of all sequences of elements of R $(a_0, a_1, \dots)$ such that $a_i = 0$ for all but a finite number of indices i . (Hungerford, 1974, p.149).

Logo define a adição e multiplicação de polinômios:

(i) $R[x]$ is a ring with addition and multiplication defined by:

$$\begin{aligned}(a_0, a_1, \dots) + (b_0, b_1, \dots) &= (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots) \text{ and} \\ (a_0, a_1, \dots)(b_0, b_1, \dots) &= (c_0, c_1, \dots),\end{aligned}$$

where

$$c_n = \sum_{i=0}^n a_{n-i}b_i = a_nb_0 + a_{n-1}b_1 + \dots + a_1b_{n-1} + a_0b_n = \sum_{k+j=n} a_kb_j.$$

(Hungerford, 1974, p.149).

(ii) If R is commutative [resp. a ring with identity or a ring with no zero divisors or an integral domain], then so is $R[x]$.

(iii) The map $R \rightarrow R[x]$ given by $r \mapsto (r, 0, 0, \dots)$ is a monomorphism of rings. [...]

The ring $R[x]$ of Theorem 5.1 is called the ring of polynomials over R . Its elements are called polynomials. The notation $R[x]$ is explained below. In view of Theorem 5.1 (iii) we shall identify R with its isomorphic image in $R[x]$ and write $(r, 0, 0, \dots)$ simply as r . Note that $r(a_0, a_1, \dots) = (ra_0, ra_1, \dots)$. We now develop a more familiar notation for polynomials. (Hungerford, 1974, p.149).

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Podemos enunciar a definição de $A[\mathbf{X}]$ da seguinte maneira:

$$p \in A[\mathbf{X}] \Leftrightarrow p = (a_0, a_1, \dots) \quad \text{com} \quad a_0, a_1, \dots \in A \quad \text{e} \quad a_i = 0 \quad \text{para todos exceto um número finito de índices } i.$$

Seguidamente se define a adição e a multiplicação sobre o conjunto $A[\mathbf{X}]$: Sejam $p, q \in A[\mathbf{X}]$, $p = (a_0, a_1, \dots) = (a_i)$ e $q = (b_0, b_1, \dots) = (b_i)$, define-se

$$\begin{aligned} p + q &= (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots) = (a_i + b_i) \\ p \cdot q &= (c_0, c_1, \dots) = (c_i) \end{aligned}$$

onde

$$c_i = \sum_{k=0}^i a_{i-k} b_k = a_i b_0 + a_{i-1} b_1 + \dots + a_1 b_{i-1} + a_0 b_i = \sum_{k+j=i} a_k b_j.$$

Na parte (i), afirma-se que $(A[\mathbf{X}], +, \cdot)$ é também um anel. Deve observar-se que estamos usando a mesma notação aditiva e multiplicativa para as leis definidas nos conjuntos, A e $A[\mathbf{X}]$, mas obviamente elas não são as mesmas.

Na parte (ii) do teorema supracitado, diz que $A[\mathbf{X}]$ tem as propriedades de A . Finalmente, em (iii) Define-se um monomorfismo que permite identificar os elementos de A com os elementos da imagem de A por este monomorfismo em $A[\mathbf{X}]$:

$$\psi : A \mapsto A[\mathbf{X}]; \quad \psi(a) = (a, 0, 0, 0, \dots)$$

Neste ponto, aparece o termo *polinômio* quando refere-se a $A[\mathbf{X}]$ como o **anel de polinômios sobre o anel** A . Porém, a presença do $\mathbf{X}$ na notação $A[\mathbf{X}]$ é um misterio. O teorema que a seguir se cita, resolve esta questão, quando sob a condição de que A seja um anel unitário cuja unidade é 1, $\mathbf{X} = (0, 1, 0, 0, \dots)$. Podemos ver que $\mathbf{X}$ não é uma variável e sim um elemento fixo de $A[\mathbf{X}]$. Se verifica que $\mathbf{X}^n = (0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots)$, 1 é o $n + 1$ termo na sequência, isto é, $\mathbf{X}^n = (a_i)$ com $a_{n+1} = 1$ e $a_i = 0$ para todo $i \neq n + 1$

Theorem 5.2. Let R be a ring with identity and denote by x the element $(0, 1_R, 0, 0, \dots)$ of $R[x]$.

(i) $x^n = (0, 0, \dots, 0, 1_R, 0, \dots)$, where 1_R is the $(n + 1)$ st coordinate.

(ii) If $r \in R$, then for each $n > 0$, $rx^n = x^n r = (0, \dots, 0, r, 0, \dots)$, where r is the $(n + 1)$ st coordinate.

(iii) For every nonzero polynomial f in $R[x]$ there exists an integer $n \in \mathbb{N}$ and elements $a_0, \dots, a_n \in R$ such that $f = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n$. The integer n and elements a_i are unique in the sense that $f = b_0 x^0 + b_1 x^1 + \dots + b_m x^m$ ($b_i \in R$) implies $m \geq n$; $a_i = b_i$ for $i = 0, 1, \dots, n$; and $b_i = 0$ for $n < i \leq m$. (Hungerford, 1974, p.149).

A exigência de A ser unitário é essencial para a definição de $\mathbf{X}$. No caso de anel sem unidade não poderia existir $\mathbf{X}$, porém haveria polinômios com coeficientes em A e o conjunto destes polinômios é um anel, o anel de polinômios sobre A . Aqui a notação $A[\mathbf{X}]$ não faz sentido.

Na definição dada por Picado, citado abaixo, pode observar-se que um *polinômio* é caracterizado como uma sequência de termos no anel A , porém, a notação $A[\mathbf{X}]$ ainda não se justifica o que acontecerá pouco mais à frente, pois A designa um anel comutativo com identidade e isto garante a existência de $\mathbf{X}$.

No que se segue A designa um anel comutativo com identidade.

POLINÓMIO

Uma sucessão

$$\begin{aligned} p : \mathbb{N}_0 &\mapsto A \\ i &\mapsto p(i) := p_i \end{aligned}$$

em A diz-se um polinómio se existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $p(i) = 0$ para todo $i > n$. O menor número $n \in \mathbb{N}_0$ nessas condições chama-se grau do polinómio (no caso em que o polinómio não é o polinómio nulo $(0, 0, 0, \dots)$; quando se trata do polinómio nulo, convencionou-se que o seu grau é $-\infty$). Os termos $p(i) := p_i$ dizem-se os coeficientes do polinómio. Denotaremos por $A[x]$ o conjunto de todos os polinómios com coeficientes no anel A .

(Picado, 2011, p26).

Somente depois de definir a indeterminada como sendo $\mathbf{X} = (0, 1, 0, 0, \dots)$, verificado que $\mathbf{X}^n = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$, onde a unidade é o $n + 1$ -ésimo termo da sequência, é possível escrever o polinômio (a_i) na forma chamada canônica:

$$a_0 + a_1 \mathbf{X} + a_2 \mathbf{X}^2 + \dots + a_n \mathbf{X}^n$$

e chamá-lo *polinômio em uma indeterminada $\mathbf{X}$ com coeficientes em A* . Também $A[\mathbf{X}]$ adquire pleno sentido. Isto justifica porque Herstein define o anel de polinômios sobre um corpo F . Conforme a definição de anel dada por Bourbaki, citada anteriormente, já eles tem unidade, assim, tudo segue de forma harmoniosa. A notação $A[\mathbf{X}]$ se justifica também pelo fato de ser o anel gerado por $A \cup \{\mathbf{X}\}$.

3 Funções polinomiais

Examinemos agora o conceito de *função polinomial*. Iniciamos esta discussão citando textualmente a Queysanne:

a) Función polinómica

Sea $f = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ un elemento de $A[X]$ (siendo A un anillo conmutativo unitario), podemos hacer corresponder a toda pareja (x, f) elemento de $A \times A[X]$ el elemento de A

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

que designaremos $f(x)$; diremos que $f(x)$ se ha obtenido sustituyendo por elemento x de A el X en el polinómio f ; definiremos así una aplicación de A en A :

DEFINICIÓN 3. A todo polinómio $f = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ de $A[X]$ (A un anillo conmutativo unitario), se puede hacer corresponder una aplicación $\tilde{f}$ de A em A definida por:

$$(\forall x \in A) \quad \tilde{f}(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = f(x)$$

llamada función polinómica asociada al polinomio f . (Queysanne, 1974, p442).

A definição dada não só permite estabelecer as diferenças entre *polinômios* e *funções polinomiais*, mas também estabelece sua relação. Denotemos por $\mathcal{F}(E, F)$ o conjunto das funções

de E em F . Um polinômio f é um elemento de $A[\mathbf{X}] \subset \mathcal{F}(\mathbb{N}, A)$, em tanto que a função polinomial associada $\tilde{f}$ é um elemento de $\mathcal{F}(A, A)$, assim:

$$f : \mathbb{N} \mapsto A, k \mapsto a_k \text{ e } \tilde{f} : A \mapsto A, x \mapsto \tilde{f}(x) = f(x)$$

pois $f = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ com quase todos os termos a_k nulos, é dizer, tendo só um número finito de termos não nulos. Se n é o maior dos índices para o qual $a_n \neq 0$, $f = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ com

$$X = (0, 1, 0, 0, \dots 0 \dots) \text{ e } \tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \text{ com } x \in A.$$

Observamos anteriormente que não é de todo conveniente definir os polinômios com coeficientes em A como funções de determinado tipo, com domínio e valores em A . No entanto, nada nos impede de definir funções de A em A a partir de polinômios em $A[\mathbf{x}]$.

FUNÇÃO POLINOMIAL

Se $p(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^n p_i \mathbf{x}^i$ é um polinômio em $A[\mathbf{x}]$, a função $p : A \mapsto A$ definida por $p(a) = \sum_{i=0}^n p_i a^i$ diz-se *função polinomial* associada a $p(\mathbf{x})$.

Exemplo: Seja $A = \mathbb{Z}_2$ e $p(\mathbf{x}) = 1 + \mathbf{x} + \mathbf{x}^2$. A função polinomial associada ao polinômio $p(\mathbf{x})$ é $p : \mathbb{Z}_2 \mapsto \mathbb{Z}_2$ dada por $p(a) = 1 + a + a^2$, para qualquer $a \in \mathbb{Z}_2$. Neste caso, temos $p(0) = p(1) = 1$, e portanto p é uma função constante, apesar de $p(\mathbf{x})$ não ser um polinômio constante. Em particular, se $q(\mathbf{x}) = 1$, temos $p(\mathbf{x}) \neq q(\mathbf{x})$ e $p = q$. (Picado, 2011, p33).

Tratando-se de polinômios, $\mathbf{X}$ é um polinômio fixo, chama-se *indeterminada* em razão de que a relação $(a_i \in A) \quad a_0 + a_1 \mathbf{X} + a_2 \mathbf{X}^2 + \dots + a_n \mathbf{X}^n = 0$ implica $a_i = 0$ para todo i , mas é um objeto por dizer “completamente determinado”. Quando se trata de funções polinomiais, x representa uma variável, ela percorre os valores de A . Esta diferencia é essencial. A observação feita por Picado no texto supracitado ilustra como o definir *polinômios* como *funções de variável em A* induz ao erro o que mostra no exemplo.

4 Polinômios na Escola

Como visto na introdução e apontado por Herstein, polinômios se apresentam desde os níveis escolares mais básicos. Quando tratado na forma de expressões algébricas se fala de uma soma de monômios, os quais se dizem constituídos de um coeficiente (número) e uma parte literal (letras). Já nesta face se introduz a falsa ideia que álgebra trata de expressões compostas por números e letras. É frequente ouvir os estudantes falar que resulta para eles fácil fazer cálculos com números e que encontram grande dificuldade quando tratam com letras. Quando se atribuem valores específicos ao que eles reconhecem como letras e os substituem pelos números dados, encontram que o resultado é um número. Os professores propõem como exercícios achar o valor numérico de diversas expressões deste tipo. Pode observarse que se trata de expressões que contem variáveis e o processo de substituir por valores específicos não é outro

que a valuação de funções possivelmente de mais de uma variável (dependendo das letras que aparecem na expressão). Assim, aqui, o que se chama polinômio realmente não é polinômio. A manipulação destas expressões em diversos procesos de cálculo tais como a redução dos chamados termos semelhantes, fatoração, produtos notáveis e outros, não são outra coisa que aplicações da propriedade distributiva da multiplicação respeito da adição de números.

Em outro estagio do ensino, observamos uma grande confusão de conceitos o que se reflete as vezes nos textos escolares. Com frequência aparece a definição de polinômio como tratando-se de uma função de variável real ou complexa. Os polinômios são funções sim mais o conjunto de valores que percorre a variável é o conjunto de números naturais (inteiros não negativos) pois são sequências. Também a confusão instala-se quando declaram que polinômio e função polinomial são o mesmo.

Consequentemente, a tarefa a relizar é a seguinte: estruturar um roteiro, uma conjunto de temas e atividades convenientemente sequenciados, encadeados, ligados entre si e organizados em passos e etapas para tornar mais eficiente o processo de aprendizado dos polinômios. Estabelecer uma organização temática que permita, de uma maneira simples e acesível, introduzir e desenvolver na escola o estudo dos polinômios (num proceso didaticamente correto) e que mantenha o rigor e precisão da teoria matemática.

Está claro que, para ser possível a elaboração de uma tal alternativa, se requer professores com uma sólida formação matemática. Não se trata de fazer um estudo das estruturas algébricas na forma como se faz em disciplinas dos cursos superiores. Trata-se de realizar um estudo concreto dentro da teoria matemática abstracta, sem mencionar sequer as denominações e as notações da álgebra abstrata. Assim, por exemplo, não é necessário nem conveniente usar termos tais como *anel*, *anel unitário*, *anel comutativo*. É suficiente que os estudantes saibam somar e multiplicar números e reconhecer e aplicar as propriedades que cumprem em cada conjunto no qual estão definidas estas operações. Em cada estagio do ensino, deve-se distinguir entre o que o professor tem que saber do que o estudante deve aprender. O professor estuda estruturas algébricas no curso de sua formação, não para ensinar os mesmos temas aos alunos, se não para orientar sua atividade docente de forma coerente.

A seguir uma proposta de roteiro para o estudo dos *polinômios* na escola que pode ser melhorado.

1. Primeira Etapa: estudo de $\mathbb{Z}[\mathbf{X}]$:

Requisito $(\mathbb{Z}, +, \times)$

- (a) Construção de sequências com termos em $\mathbb{Z}$
- (b) Construção de sequências com termos em $\mathbb{Z}$ com un númeto finito de termos não nulos.
- (c) Definir estas sequências como *polinômios com coeficientes em $\mathbb{Z}$* .
- (d) Somar sequências com termos inteiros.
- (e) Somar polinômios com coeficientes inteiros. Destacar a soma com $(0, 0, 0, \dots)$.

- (f) Multiplicar polinômios com coeficientes inteiros. Destacar o produto com $(1, 0, 0, \dots)$.
- (g) Identificar $a \in \mathbb{Z}$ com o polinômio $(a, 0, 0, \dots)$. Assim, $a = (a, 0, 0, \dots)$.
- (h) Introduzir a notação, para $a \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} (a, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots) &= a(1, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots) \\ (0, a, 0, \dots, 0, 0, \dots) &= a(0, 1, 0, \dots, 0, 0, \dots) \\ &\vdots \\ (0, 0, 0, \dots, a, 0, \dots) &= a(0, 0, 0, \dots, 1, 0, \dots) \end{aligned}$$

- (i) Definir $\mathbf{X}$ como sendo o polinômio $(0, 1, 0, \dots, 0, 0, \dots)$.
- (j) Efetuar o produto $\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}$, observar o resultado e denotar-lo como $\mathbf{X}^2$. Efetuar $\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^2$, observar o resultado e denotá-lo como $\mathbf{X}^3 \dots$
- (k) Definir $\mathbf{X}^0 = (1, 0, 0, \dots) = 1$ (lembrar a identificação). Definir $\mathbf{X}^1 = \mathbf{X}$
- (l) Decompor polinômios e exprimi-los na forma canônica. Por exemplo,

$$\begin{aligned} (2, 3, 2, 0, 0, \dots) &= 2(1, 0, 0, \dots) + 3(0, 1, 0, \dots) + 2(0, 0, 1, 0, \dots) + (0, 0, 0, \dots) \\ &= 2\mathbf{X}^0 + 3\mathbf{X}^1 + 2\mathbf{X}^2 \\ &= 2 + 3\mathbf{X} + 2\mathbf{X}^2 \end{aligned}$$

2. Segunda Etapa: estudo de $\mathbb{Q}[\mathbf{X}]$

Requisito: $(\mathbb{Q}, +, \times)$

De forma análoga a os polinômios com coeficientes inteiros. Poderia-se nesta etapa se introduzir um pouco mais de formalismo matemático. Deve-se chegar ao conceito de *polinômios com coeficientes racionais* como *sequências de termos em $\mathbb{Q}$ e com um número finito de termos não nulos*. Montar um processo para conseguir a forma canônica.

3. Terceira Etapa: estudo de $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$

Requisito: $(\mathbb{R}, +, \times)$

De forma análoga a os polinômios com coeficientes inteiros. Poderia-se nesta etapa se introduzir um pouco mais de formalismo matemático. Deve-se chegar ao conceito de *polinômios com coeficientes reais* como *sequências de termos em $\mathbb{R}$ e com um número finito de termos não nulos*. Montar um processo para conseguir a forma canônica.

Agradecimentos

Devo registrar meu profundo agradecimento ao Professor Clezio Aparecido Braga pelas observações feitas nas diferentes oportunidades em que falamos sobre o tema e pela leitura do manuscrito. Um tempo, doado generosamente, muito difícil de repor.

Referências

- BOURBAKI, N. **Elements of Mathematics. Algebra I. Chapters 1-3.** Great Britain: Addison-Wesley Publishing Company, 1974. 709 p.
- HERSTEIN, I. N. **Topics in Algebra.** USA: Ginn and Company, 1964. 342 p.
- HUNGERFORD, T. W. **Algebra.** New York: Springer-Verlag Inc, 1974. 502 p.
- LANG, S. **Algebra.** Rev. 3 ed.(Graduate texts in mathematics; 211). New York: Springer, 2002 (corrected printing 2005). 923 p.
- IEZZON, G. et all. **Matemática e realidade: 8º ano.** 6 ed. São Paulo: Atual, 2009. 352 p.
- MARTINS de LEONARDO, F. (Editor). **Conexões com a Matemática** (Obra Coletiva). v.3, 2 ed. São Paulo: Editora Moderna, 2013. 458 p.
- PAIVA, M. **Matemática Paiva** (Manual do Professor). v. 3. 2 ed. São Paulo: Editora Moderna, 2013. 231 p.
- PAIVA, M. **Matemática.** Volume único 1 ed. São Paulo: Editora Moderna, 2005. 491 p.
- PICADO, J. **Corpos e Equações Algébricas.** Coimbra: Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra, 2011. 192 p.
- QUEYSANNE, M. **Álgebra Básica.** Barcelona: Editorial Vicens Vives, 1974. 669 p.
- ROTMAN, J. J. **Advanced Modern Algebra.** 1st edition (2002); 2nd printing (2003) New Jersey: Prentice Hall, 2002. 1040 p.
- SMITH J. D. H. **Introduction to Abstract Algebra** Iowa State University Ames, Iowa, U.S.A.: Chapman & Hall/CRC Taylor & Francis Group, 2009. 318 p.

Uma experiência com tarefa exploratória no ensino de Função Quadrática

Ana Maria Foss

Universidade Estadual do Oeste do Paraná
anafoss@bol.com.br

Viviane Fátima Ribeiro

Universidade Estadual do Oeste do Paraná
vivianeribeiro1819@outlook.com

Resumo: Este trabalho tem como objetivo relatar o desenvolvimento de uma tarefa de Investigação Matemática, mais especificamente uma tarefa exploratória. Foi feito o uso de tecnologias, o software Geogebra para o ensino de alguns tópicos do conteúdo de Funções Quadráticas. A experiência ocorreu no Colégio Olinda Truffa de Carvalho, cidade de Cascavel-Paraná, com uma turma de primeiro ano do Ensino Médio. Constatamos que as aulas exploratórias e a utilização de softwares (no nosso caso o Geogebra) podem contribuir para motivar os alunos na busca pelo conhecimento matemático, o que não foi observado em aulas baseadas na metodologia tradicional.

Palavras-chave: Investigação Matemática; Geogebra; Resolução de Problemas.

1 Introdução

Este trabalho tem como objetivo relatar uma das atividades realizadas durante a disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática - Estágio Supervisionado II do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná, *campus* de Cascavel. O exercício de prática ocorreu durante o primeiro semestre do ano letivo de 2018, sendo realizadas observações em turmas do Ensino Médio e a regência em uma turma do primeiro ano no Colégio Olinda Truffa de Carvalho, situado na cidade de Cascavel-Paraná.

Preparamos e executamos 18 planos de aula, fundamentados na Resolução de Problemas e Investigação Matemática, também aliados ao uso de tecnologias. A professora regente solicitou que trabalhássemos os seguintes conteúdos: Equações, Inequações e Funções Quadráticas.

Durante nosso trabalho objetivamos promover a Aprendizagem Significativa, para isso procuramos distanciar-nos de aulas meramente expositivas e desenvolvemos mais situações problemas. Nestas, os alunos procuravam descobrir as regularidades e conjecturas para, posteriormente, por meios dos resultados obtidos pela turma, formalizávamos os conceitos. Acreditamos que podemos desenvolver um ensino no qual os alunos atuem como co-construtores do conhecimento e o professor como mediador nesse processo, evidenciando, assim, que a Matemática é uma ciência em construção e constituindo a ideia de que os alunos podem produzir e descobrir os conhecimentos nessa disciplina.

Neste trabalho há o relato de nossas conquistas e também dos nossos erros e acertos. Buscamos desenvolver materiais potencialmente significativos, bem como utilizamos de diferentes materiais, como a balança pictórica e o software Geogebra (o qual relataremos neste trabalho). Em algumas aulas, mesmo com o uso de diferentes metodologias, não conseguimos despertar o interesse e a vontade dos alunos em aprender Matemática. Cabe ressaltar que, para que ocorra a efetivação de uma aprendizagem significativa, uma condição que deve ser satisfeita é que os alunos devem ter a predisposição para aprender.

Em alguns casos, apesar de nosso esforço, os objetivos não foram alcançados. Já em outras aulas nos surpreendemos, porque durante as observações alguns alunos não desenvolviam as atividades propostas pela professora regente, porém, durante a nossa regência, estes demonstravam esforçar-se para aprender. São esses alunos que nos incentivam a continuar desenvolvendo o nosso trabalho, afinal, conseguimos motiva-los a aprender Matemática.

Neste trabalho procuramos relatar o desenvolvimento de uma atividade desenvolvida segundo os pressupostos da Investigação Matemática, desde a reação dos alunos durante a execução das tarefas, até a descrição dos objetivos alcançados. Assim, esperamos que nossos relatos contribuam para experiências futuras.

2 Fundamentação Teórica

No desenvolvimento das aulas procuramos incentivar a participação dos alunos na construção do conhecimento. Mediante o abandono de aulas meramente expositivas, construímos uma prática baseada em uma aprendizagem por descoberta por meio da Resolução de Problemas. Identificamos inicialmente os conhecimentos prévios relevantes que os alunos possuíam acerca de cada conteúdo a ser ensinado e utilizamos destes como ancoragem para o ensino de conceitos de equação, inequação e função.

Como já citado anteriormente a metodologia predominante utilizada para o desenvolvimento das atividades foi a Resolução de Problemas segundo a concepção do Grupo de Trabalho e Estudo sobre Resolução de Problemas da Universidade Estadual Paulista (GTERP). De acordo com essa metodologia, Onuchic (1999) e Allevato e Onuchic (2009), podemos ensinar partindo de situações problemas baseados na realidade dos alunos e a construção do conhecimento se dá por meio da resolução desses problemas. O professor tem papel fundamental nesse processo pois ele precisa preparar materiais potencialmente significativos e de acordo com a estrutura cognitiva dos seus alunos. Desta forma, eles passam a atuar como co-construtores do conhecimento e, dessa forma, o professor assume uma nova postura, passando a mediar, incentivar e orientar a situação de aprendizagem.

Pozo e Echeverría destacam que

A solução de problemas baseia-se na apresentação de situações abertas e sugestivas que exijam dos alunos uma atitude ativa ou um esforço para buscar suas próprias respostas, seu próprio conhecimento. [...] assim ensinar os alunos a resolver problemas supõe dotá-los da capacidade de aprender a aprender, no sentido de habituá-los a encontrar por si mesmos respostas às perguntas que os inquietam ou que precisam responder, ao invés de esperar uma resposta já elaborada por outros (POZO; ECHEVERRÍA, 1988, p. 09).

A adoção da metodologia de ensino através da Resolução de Problemas contribui para que a aprendizagem seja significativa. Nas palavras de Moreira (2010) “é aquela em que ideias expressas simbolicamente interagem de maneira substantiva e não arbitrária com aquilo que o aprendiz já sabe”, ou seja, os novos conhecimentos interagem com algum conhecimento especificamente relevante já existente na estrutura cognitiva do aluno, provocando reconstrução e reorganização dos conhecimentos em sua estrutura cognitiva.

A justificativa para a utilização de Resolução de Problemas é, além de criar situações contribuindo para que a aprendizagem seja significativa, desenvolver a crença de que os alunos podem produzir Matemática e que ela é uma ciência em construção. Desta forma, contribui para que, em situações que estão ao alcance dos alunos, eles possam gerenciar melhor as informações levando em conta conceitos matemáticos aprendidos na escola. Também, podemos nos atentar ao fato de que a Matemática surgiu na necessidade de explicar e resolver problemas e assim também podemos proceder na sala de aula, levando em consideração os conhecimentos prévios relevantes que os alunos possuem e utilizando-se de problemas, os quais geram a necessidade para construção de novos conceitos.

Para o trabalho de análise dos coeficientes e do número de raízes da função quadrática optamos por propor aos alunos tarefas de Investigação Matemática, mais especificamente tarefas com caráter exploratório, onde:

[...] no processo de ensino e aprendizagem a ênfase deve ser colocada no aluno e nas condições que favoreçam a participação, individual e coletiva, numa atividade de inquirição. Nesta perspectiva o conhecimento matemático é construído a partir de situações práticas específicas, em que os alunos levantam questões, formulam conjecturas e exploram possíveis caminhos, apoiando-se nas suas experiências anteriores (OLIVEIRA; CARVALHO, 2014, p. 466).

E que se diferenciam das tarefas investigativas devido ao seu grau de abertura e assim:

Entre as tarefas de exploração e as de investigação a diferença está [...] no grau de desafio. Se o aluno puder começar a trabalhar desde logo, sem muito planejamento, estaremos perante uma tarefa de exploração. Caso contrário, será talvez melhor falar em tarefa de investigação (PONTE, 2005, p.18).

As tarefas investigativas geralmente não apresentam questões a serem respondidas, essas questões fazem parte do trabalho do aluno, esse deverá formulá-las conforme seu interesse. Já as tarefas exploratórias geralmente são compostas com questões que começam a induzir o aluno a perceber algo que sempre acontece ou não. As questões seguintes o induzem a concluir e generalizar os resultados identificados, ou seja, esse tipo de tarefa propõe ao aluno alguns encaminhamentos/passos para a investigação. Por isso esse tipo de tarefa é mais indicado para alunos que não estão acostumados com a autonomia dada pelas tarefas investigativas.

Tínhamos como objetivo destas atividades de Investigação Matemática a criação de alternativas para o ensino de Matemática, buscando colaborar para a superação do tradicionalismo no ensino desta disciplina.

Utilizando-nos do aporte teórico, apropriado através de leituras, criamos alternativas para o ensino de Matemática por meio de algumas aulas exploratórias. Acreditamos que contribuímos para a superação do tradicionalismo no ensino de Matemática, uma vez que deixamos a posição do professor como transmissor de conteúdo e colocamos os estudantes como protagonistas de suas próprias aprendizagens.

As investigações são muito importantes do ponto de vista da aprendizagem já que desenvolvem nos alunos capacidades como comunicação, argumentação, pesquisa, seleção, organização, criatividade, espírito crítico e além disso, promovem a aprendizagem de conceitos matemáticos, pois

Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo. Só assim se pode realmente dominar os conhecimentos adquiridos. Só assim se pode ser inundado pela paixão ‘detetivesca’ indispensável à verdadeira fruição da Matemática. Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles (BRAUMANN, 2002, p. 5).

Para a realização destas tarefas agregamos o trabalho com o Geogebra. O Geogebra é um software livre e gratuito, desenvolvido pelo austríaco prof. Dr. Markus Hohenwarter em 2001 e destina-se ao ensino de Geometria, Álgebra e Cálculo (SOARES, 2012; KOLODZIEISKI, 2011). Além das ferramentas de geometria dinâmica, o software oferece um suporte à entrada de equações e coordenadas, permitindo duas representações de um mesmo objeto que interagem entre si. Sendo assim, o Geogebra possibilita a relação entre as representações algébricas e geométricas (SOARES, 2012).

Segundo Kolodzieiski (2011) a utilização de softwares como o Geogebra na sala de aula amplia as possibilidades de investigação ao favorecer características dinâmicas em diversos tipos de representações. Ao propor uma tarefa no Geogebra o professor pode procurar despertar nos alunos o interesse pela Matemática e pela exploração, visto que o uso de computadores nas aulas pode chamar a atenção dos educandos, tornando as aulas mais atrativas. O aluno pode dar maior significado às ideias matemáticas, já que estas “se tornam” mais palpáveis e visualizáveis (KOLODZIEISKI, 2011).

Nas atividades desenvolvidas os alunos seguiam um roteiro com comandos de execução no software e assim observam regularidades que permitiam compreender de forma mais eficaz conceitos relacionados a funções quadráticas. Além de facilitar a aprendizagem, o uso de tecnologias atua de forma motivacional na aprendizagem de Matemática e permite que os alunos descubram, identifiquem e aprendam os conteúdos sob um novo olhar. Assim, contribui para

formação de significados e, através da manipulação do software, eles visualizam e discutem com seus colegas as regularidades que eles próprios construíram.

De acordo com Canavarro (1994) o uso de tecnologias é: Um elemento de motivação para aumentar o interesse dos alunos pelas aulas; Elemento de modernização, por fazer parte dos diversos âmbitos da sociedade; Elemento de facilitação para realizar tarefas que podem ser feitas manualmente, como cálculos e construção de gráficos; Elemento de mudança para criar novas dinâmicas educativas, provocando inovações no processo de ensino e aprendizagem.

Pelo exposto, nosso objetivo foi promover situações nas quais haja novas forma de ensinar e aprender Matemática, de tal forma que essa aprendizagem seja significativa, oportunizando que o aluno desenvolva autonomia intelectual, contribuindo assim para formação de sujeitos críticos que utilizem do saber matemático aprendido na escola em seu cotidiano.

3 Descrição da tarefa

Segue a tarefa proposta aos alunos, a qual foi desenvolvida no software Geogebra.

1. Concavidade

Encaminharemos os alunos ao laboratório de informática para desenvolver as atividades propostas.

Entregar uma folha para cada aluno com a sequência de comandos para serem executados no software Geogebra, como segue:

- Abra o software Geogebra clicando sobre o ícone *menu principal* (no canto superior esquerdo da tela), em seguida selecione *Educativo* e *Aprender Matemática (Geogebra)*.
- No campo de entrada (no canto inferior esquerdo) digite:

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

- Agora vamos inserir os controles deslizantes, para isso clique em controle deslizante no ícone conforme mostra a Figura 1.

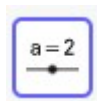


Figura 1: Ícone controle deslizante

- Em seguida clique em qualquer Área da tela. Aparecerá uma janela com o valor para a , clique em “OK”, repita-o mais duas vezes e aparecerá os valores para b e c .
- Clique na bolinha conforme mostra a Figura 2 na qual aparece o valor de a e arraste-a para a direita e para a esquerda.

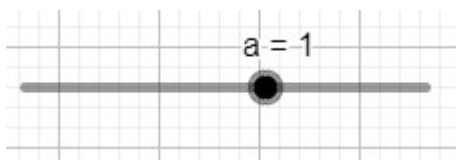


Figura 2: Controle deslizante do parâmetro a

- Agora responda: O que vocês observam no gráfico? O que ocorre quando a é negativo? Se a é negativo e você reduz cada vez mais o valor de a o que acontece com o gráfico? E quando a é positivo o que acontece com o gráfico? Se você aumentar cada vez mais o valor de a o que acontece?

O intuito é que os alunos associem a concavidade da parábola com o coeficiente a da função quadrática. Objetiva-se também que eles observem que se a é positivo quanto maior for seu valor “menos aberta” será a parábola, da mesma forma se a é negativo quanto maior seu valor “mais aberta” será a parábola.

Nas atividades foi solicitado aos alunos que anotem suas conclusões em uma folha separada para entregar ao final da aula.

2. Zeros de uma função do 2º grau.

- No campo de entrada, digite $a = 1$ “enter”, $b = 3$ “enter” e $c = 2$ “enter”, e na janela de Álgebra aparecerá o gráfico da função

$$f(x) = x^2 + 3x + 2,$$

conforme a Figura 3.

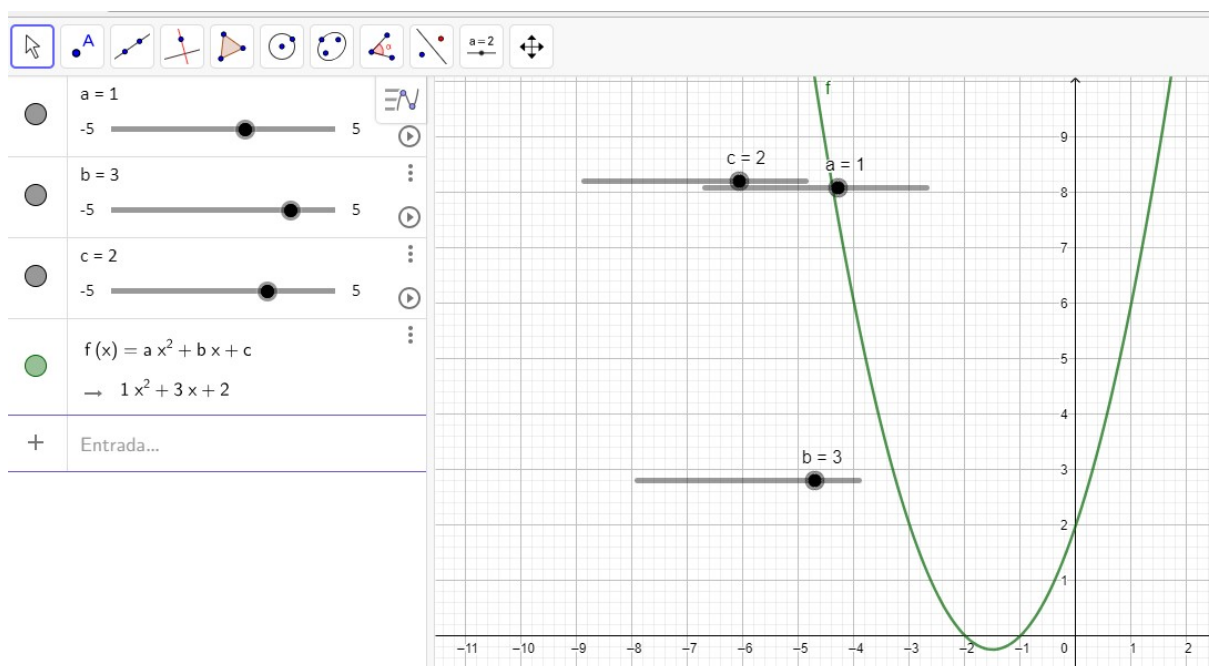


Figura 3: Gráfico de $f(x) = x^2 + 3x + 2$ no Geogebra

- Em seguida ative a ferramenta ponto conforme Figura 4 e selecione a opção interseção de dois objetos conforme a Figura 5.



Figura 4: Ícone da ferramenta ponto

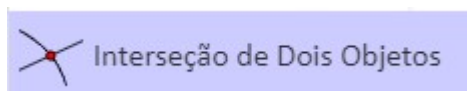


Figura 5: Ícone da ferramenta interseção de dois objetos

- Marque a interseção da parábola (gráfico da função) com o eixo x , clicando sobre os dois objetos, um de cada vez. Os pontos serão rotulados A e B , como mostrado na Figura 6:

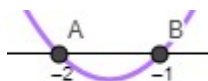


Figura 6: Pontos A e B

- Ative a opção mover conforme mostra a Figura 7.



Figura 7: Ícone da ferramenta mover

- Clique com o botão direito sobre o ponto A , selecione propriedades na persiana que se abrirá na guia básico, selecione configurações e mude o estilo do rótulo alterando para nome e valor.
- Faça o mesmo para o ponto B . O resultado é apresentado na Figura 8.

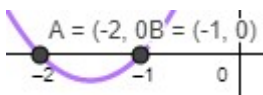


Figura 8: Coordenadas dos pontos A e B

Agora responda:

a) Quais as coordenadas dos pontos A e B ?

Resposta: $A = (-2, 0)$ e $B = (-1, 0)$.

b) O que esses pontos representam na função? Justifique?

Resposta: As raízes ou zeros da função, pontos de interseção da parábola com o eixo x .

4 Relato da atividade

Inicialmente entregamos o roteiro do trabalho com o Geogebra aos alunos e explicamos como seria desenvolvido a atividade no laboratório de informática. Ressaltamos que, ao final da aula, os alunos deveriam entregar uma folha contendo as respostas dos questionamentos do roteiro. Desenvolvemos a atividade com 26 alunos organizados em dupla devido a limitação do número de computadores. No desenvolvimento do trabalho os alunos demonstraram dificuldades para realizar os comandos pois eles não estavam familiarizados com o software. Por isso, auxiliamos as duplas em todos os passos do roteiro.

Na primeira tarefa, a qual os alunos deveriam identificar a relação entre o coeficiente a e a concavidade da parábola, apenas três alunos não a identificaram. Já a relação que se a é positivo quanto maior for seu valor “menos aberta” será a concavidade e se a é negativo quanto maior seu valor “mais aberta” será a concavidade, 11 alunos a identificaram. Percebemos que os alunos também variaram os valores de b e c , porém não relataram nada conclusivo dizendo que os valores de b e c eram positivos ou negativos ou ainda aumentavam ou diminuía. Todos resolveram até o item a da questão. Apenas um aluno não entregou seu relatório.

Percebemos que a primeira tarefa exploratória investigativa proporcionou aos alunos identificar a relação entre o coeficiente a e a concavidade da parábola, já que eles perceberam a regularidade. Porém, a dificuldade foi relatá-la uma vez que não definimos o que era concavidade da parábola. Alguns alunos afirmaram que o gráfico estava voltado para cima ou para baixo. Isso foi proposital pois o objetivo era primeiro que eles identificassem o que era e posteriormente (na próxima aula) explicaríamos as nomenclaturas.

No que se refere ao andamento da atividade, percebemos que, no início, os alunos não entenderam que se tratava de uma aula investigativa, já que muitos deles queriam as respostas antes mesmo de uma leitura aprofundada do roteiro proposto. Porém, contornamos essa situação baseando-se nas teorias estudadas, motivando os alunos a investigar.

Na etapa de conjecturar hipóteses, os alunos demonstraram receio de errar as respostas dos questionamentos, gerando inicialmente certa instabilidade na etapa da exploração. Ao questionarmos os estudantes sobre este medo, os mesmos justificaram que queriam a garantia de que as respostas aos questionamentos estavam corretos. Diante dessa situação, explicamos para os estudantes que o erro fazia parte de uma investigação e que, posteriormente, haveria uma reformulação e validação das hipóteses formuladas.

Confirmamos a eficácia da proposta nos relatórios feitos pelos alunos, onde pudemos constatar as conjecturas formuladas. Isso nos permitiu planejar a próxima aula, na qual abordamos as conjecturas e as formalizamos, já que os alunos utilizavam do entendimento e do vocabulário que tinham para se referir a elementos do gráfico da função quadrática. Assim, apresentamos a eles os termos matemáticos utilizados.

Considerações Finais

Pudemos perceber potencialidades e dificuldades em um trabalho que envolve o processo de explorar e investigar matematicamente.

Primeiramente, deparamo-nos com a dificuldade dos alunos desta turma não terem tido contato anterior com as tarefas de cunho exploratório e investigativo e nem com um ambiente investigativo. No entanto, podemos afirmar que, apesar das dificuldades iniciais, os alunos envolveram-se nas aulas e participaram das atividades propostas. Verificamos indícios da produção de sentidos e significados dos conhecimentos matemáticos mobilizados na atividade realizada.

Outra consideração importante é que os ambientes de geometria dinâmica (Geogebra) apresentam um grande potencial para que atividades investigativas sejam elaboradas. A função controle deslizante permite que o estudante crie e teste suas próprias conjecturas. Apesar disso, é muito importante que as atividades elaboradas nesse ambiente sejam bem direcionadas.

Quanto a utilização da Resolução de Problemas como metodologia, encontramos muitos desafios, já que os alunos não estavam habituados a resolver problemas. Os estudantes tinham muitas dificuldades na interpretação destes e consequentemente em traçar estratégias para resolvê-los utilizando seus conhecimentos prévios para isto. Porém, não afirmamos que a metodologia não seja eficaz, mas ressaltamos que o trabalho com essa deve ser contínuo para que os alunos adquiram a capacidade de interpretar e resolver problemas e assim possamos utilizar a tendência metodológica Resolução de Problemas como realmente deve ser utilizada: para deflagrar o conteúdo atribuindo-lhe significado.

Além disso, enfrentamos outras dificuldades, como por exemplo, com as tarefas de casa, que eram exercícios de fixação. Objetivávamos que os alunos resolvessem problemas utilizando os conceitos trabalhados em sala de aula, porém, poucos alunos as faziam. Assim, os alunos não gravaram bem os conceitos estudados e, consequentemente, não apresentavam dúvidas.

Entretanto, foi uma experiência muito significativa para nossa formação inicial. Constatamos como aulas exploratórias e a utilização de softwares (no nosso caso o Geogebra) podem contribuir para motivar os alunos na busca pelo conhecimento matemático, o que não observamos em aulas baseadas na metodologia tradicional.

Referências

- BRAUMANN, C. Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática. In: PONTE, J. P., COSTA, C., ROSENDO, A. I., MAIA, E., FIGUEIREDO, N. e DIONISIO, A. F. (Eds.). **Atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores**. Lisboa: SEM-SPCE, 2002.
- CANAVARRO, Ana P. **Concepções e práticas de professores de matemática**: três estudos de caso. 1993. 361f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 1994.
- ECHEVERRÍA, M. D. P. A solução de problemas em matemática. In: POZO, J. I. (org.). **A solução de problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed, 1998, p. 44-65.
- KOŁODZIEJSKI, J. F. **O software GeoGebra como ferramenta para o ensino da matemática**. In: Conferência Interamericana de Educação Matemática, Recife: 2011.
- MOREIRA, M. A. **O que é a Aprendizagem significativa afinal?** Instituto de Física. UFRGS. Porto Alegre- Rio Grande do Sul.
- OLIVEIRA, H.; CARVALHO, R. Uma experiência de formação, com casos multimídia, em torno do ensino exploratório. In: PONTE, J. P. (Org.) **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. Lisboa: IE/UL, 2014. p. 465-490.
- ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática**: Concepções e Perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. Cap. 12, p.199-218.
- PONTE, J. P. Gestão Curricular em Matemática. In: GTI (Ed.). **O professor e o Desenvolvimento Curricular**. Lisboa: APM, 2005. p. 11-34.
- POZO, J. I. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In: POZO, J. I. (org.). **A solução de problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed, 1998, p. 13-42.

Um olhar sobre problemas para a Resolução de Problemas

Ana Maria Foss

Universidade Estadual do Oeste do Paraná
anafoss@bol.com.br

Resumo: Neste trabalho realizam-se reflexões sobre as atividades desenvolvidas durante o primeiro semestre de 2017 na disciplina Resolução de Problemas e Modelagem Matemática do Curso Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná, *campus* de Cascavel ministrada pelo professor Dr. Tiago Emanuel Klüber. Atividades essas que tinham como objetivo identificar problemas considerados bons para uma aula baseada em Resolução de Problemas. Assim o presente trabalho tem como objetivo realizar uma análise dos problemas discutidos em sala de aula quanto a sua utilização para uma aula baseada em Resolução de Problemas bem como apresentar alguns aspectos dessa metodologia. As atividades desenvolvidas durante a disciplina proporcionaram a nós alunos um conhecimento mais aprofundado da tendência Resolução de Problemas, bem como analisar e reformular problemas que podem ser problemas geradores em uma aula baseada na tendência em questão. Percebemos que somos capazes de planejar e realizar uma aula baseada na tendência Resolução de Problemas. Também não precisamos criar os problemas, os encontramos em muitos lugares, porém muitas vezes eles precisam de reformulações para se tornarem adequados aos objetivos almejados.

Palavras-chave: Resolução de Problemas; Experimentos matemáticos; Formação Inicial de professores.

1 Introdução

Podemos observar que a Matemática é a disciplina que mais faz “inimigos”, muitos alunos do ensino básico não gostam dela justamente por não terem aprendido conceitos básicos dessa ciência, necessários para a construção de novos conceitos ou até mesmo não entenderem alguns procedimentos práticos utilizados na resolução de problemas e exercícios.

Na busca de proporcionar um ensino de matemática mais significativo, surgem as Tendências em Educação Matemática. Elas estão previstas nas Diretrizes Curriculares para o ensino de Matemática do Estado do Paraná (DCE) (PARANÁ, 2008). Acredita-se que uma proposta metodológica, fundamentada nas Tendências em Educação Matemática possibilite uma melhor compreensão e torne a construção do conhecimento matemático mais significativo e seja capaz de tornar a Matemática uma disciplina agradável, fácil de aprender e de ser ensinada.

Nesse sentido, a Resolução de Problemas, uma das Tendências em Educação Matemática, propõe uma nova forma de aprender e ensinar. A ideia de ensino por trás dessa metodologia é ensinar através da Resolução de Problemas. Segundo Prado e Allevato (2010) um problema é o ponto de partida para o ensino e a construção do conhecimento matemático se faz através da sua resolução. Mas não são quaisquer problemas que podem ser usados.

Por isso ao longo deste trabalho serão analisadas as atividades desenvolvidas durante o primeiro semestre de 2017 da disciplina Resolução de Problemas e Modelagem Matemática do Curso Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná *campus* de Cascavel ministrada pelo professor Dr. Tiago Emanuel Klüber. Atividades essas que tinham como objetivo identificar problemas considerados bons para uma aula baseada em Resolução de Problemas. Assim o presente trabalho tem como objetivo realizar uma análise dos problemas discutidos em sala de aula quanto a sua utilização para uma aula baseada em Resolução de Problemas bem como apresentar alguns aspectos dessa metodologia.

Nas seções a seguir serão apresentadas as três principais atividades desenvolvidas durante a disciplina em questão assim como uma análise dessas quanto a sua utilização em uma aula baseada em Resolução de Problemas. Finalmente apresentarei algumas considerações sobre a importância dessas atividades desenvolvidas para a minha formação como professora, do ponto de vista da Resolução de Problemas e também a perspectiva da metodologia de ensino em questão que considero melhor para o ensino de Matemática.

2 Os primeiros problemas

A primeira atividade desenvolvida durante a disciplina Resolução de Problemas e Modelagem Matemática foi uma lista denominada “Lista Resolução de Problemas” a qual continha uma seleção de doze problemas. Durante as aulas que nos ocupamos com esses problemas os resolvemos e discutimos suas possíveis resoluções e suas funcionalidades para o ensino. Seguem os problemas:

Lista Resolução de Problemas

1. Sabendo que $144 \cdot 177 = 25488$ podemos concluir que $\frac{254,88}{0,177}$ é igual a:
2. Num teste com 84 questões se você acerta $\frac{58}{84}$ das questões, então qual é o seu percentual de acertos?
3. Quantas frações menores do que 1 existem, tais que o numerador e denominador são números naturais de um algarismo?
4. Quantos são os números que ao dividir 2007 deixam resto 5?
5. Sabemos que dois pontos distintos em um plano determinam uma e somente uma reta. Quantas retas são determinadas pelos pontos marcados no quadriculado da Figura 1 a seguir?

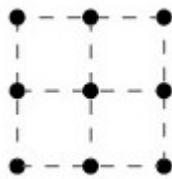


Figura 1: Quadriculado

Fonte: Banco de questões OBMEP, 2008.

6. Os números 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 e 9 foram escritos (em uma ordem desconhecida) ao redor de uma circunferência. Lendo esses números de 3 em 3 no sentido horário, formam-se 9 números de três algarismos. Determine a soma desses 9 números.
7. Um número quando dividido por 3, tem resto 1; por 4 tem resto 2; por 5 tem resto 3; por 6, tem resto 4. Qual o menor número inteiro positivo que satisfaz tais propriedades?
8. Calcule a soma

$$S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2006 \cdot 2007} + \frac{1}{2007 \cdot 2008}$$

- .
9. Escolha dois números inteiros. Encontre sua soma e a diferença não negativa entre eles. Some esses resultados. Alguma observação?
 10. Seja $S_n = \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$. Para que tipo de inteiros, n , pode-se efetuar uma partição em S_n em dois subconjuntos de modo que a soma dos elementos de cada subconjunto seja a mesma? Por Exemplo $S_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ pode ser dividido em $\{1, 6, 7\}$ e $\{2, 3, 4, 5\}$.
 11. Aumentando-se a base e a altura de um retângulo em 20%, em que porcentagem a área aumentará?
 12. Numa corrida de São Paulo a Fortaleza participam quatro carros A, B, C, D que largaram na seguinte ordem: primeiro A, segundo B, terceiro C e por último D. Durante a corrida, A e B trocaram de posição (ultrapassaram um ao outro) 9 vezes e B e C trocaram de posição 8 vezes. Para saber em que ordem chegaram à Fortaleza, só é permitido fazer perguntas do tipo: “Quantas vezes trocaram de posição os carros X e Y?” Antes de fazer uma pergunta se conhece a resposta da pergunta anterior. Formule três perguntas que permitam determinar a ordem em que os quatro terminaram a corrida.

Segundo Butts (1997) podemos classificar os problemas como:

- Exercícios de reconhecimento;
- Exercícios algorítmicos;
- Problemas de aplicação;

- Problemas de pesquisa aberta;
- Situações-problema.

Baseando-se nessas categorias podemos inferir que os problemas 1, 3, 5 e 6 podem ser considerados exercícios de reconhecimento já que para resolvê-los faz-se necessário relembrar definições, propriedades e teoremas. Para resolver o problema 1, por exemplo, precisamos recordar que a multiplicação e a divisão são operações inversas. O problema 3 precisamos saber o que é uma fração, identificar quem é o denominador e o numerador quando uma fração é menor que um e também relembrar quem são os números naturais. Já para resolver o problema 5 precisamos recordar que apesar de que “dois pontos distintos em um plano determinam uma e somente uma reta” (axioma dado no problema) três pontos colineares não determinam duas retas distintas e o problema 6 para ser resolvido necessita do conhecimento da comutatividade e da associatividade da operação de adição.

Butts (1997) sugere que os exercícios de reconhecimento podem ser reformulados para gerar discussões interessantes em sala de aula. Por exemplo, o problema 3 pode ser reformulado da seguinte forma: dê um exemplo de fração menor que 1, tal que o numerador e o denominador são números naturais de um algarismo. Os alunos ao respondê-lo obterão respostas diferentes e se questionarão o porquê disto. Assim confirmarão que há mais de uma fração que satisfaz isso e logo podem se questionar se são infinitas as frações que satisfazem as condições dadas no problema.

Porém esse problema sozinho não fará com que essas discussões todas venham à tona. Por isso o papel do professor em uma aula baseada na Resolução de Problemas deve ser de questionador e instigador procurando provocar trocas de ideias e investigações nos grupos, trazendo assim implicitamente as discussões as quais ele objetiva que os alunos façam e que são necessárias a construção do novo conhecimento.

No problema 5 para reformulá-lo é necessário que se retire a frase “Sabemos que dois pontos distintos em um plano determinam uma e somente uma reta”, pois esse pode ser o novo conhecimento a ser ensinado aos alunos. Dois aspectos a serem considerados em um problema são: os alunos não o resolverão apenas com seus conhecimentos prévios e as situações abordadas por eles devem explorar o novo conhecimento em sua resolução. Pois se os alunos já souberem o conhecimento que resolve o problema estaremos ensinando Matemática para resolver de problemas. Essa concepção está muito presente no ensino de Matemática atualmente já que professores que tem essa concepção primeiramente explicam formalmente ou através de exemplos o novo conteúdo e depois propõe a seus alunos problemas para apresentarem aplicações dos conteúdos matemáticos.

Essa concepção não traz muito significado ao ensino de Matemática e também estaremos tornando nossos alunos meros expectadores passivos já que professores com essa concepção privam seus alunos da estimulação da curiosidade, do espírito de investigação e da capacidade de resolver problemas ao lhe darem as ferramentas prontas para resolvê-los. É necessário pensar que estamos formando cidadãos e conscientizar-nos que a Matemática tem poder para transformar

as pessoas e as ensinar a viver em sociedade sendo pessoas ativas e não alienadas assim essa concepção de ensinar Matemática para resolver problemas não faz sentido quando consideramos a formação de cidadãos.

Os problemas 1 e 6 também podem ser reformulados porém temos que ter em mente que eles não podem “entregar” o novo conhecimento o qual o professor deseja ensinar e eles devem desencadear discussões pertinentes a construção do novo conhecimento matemático.

Já os problemas 4, 7, 8 e 9 podem ser classificados como exercícios algorítmicos já que podem ser resolvidos usando procedimentos passo a passo. Para resolver os problemas 4 e 7, por exemplo, é necessário conhecer inicialmente o algoritmo euclidiano da divisão e para solucionar o problema 8 faz necessário generalizar uma fórmula para a soma dos 2007 termos do somatório já o problema 9 requer conhecimento do algoritmo da adição e subtração.

O principal defeito desses problemas é o incentivo à repetição de algoritmos. Butts (1997) sugere que para reformulá-los é necessário propor o problema em “sentido contrário” pois a “inversão de um problema frequentemente tem mais que uma solução” (BUTTS, 1997, p.39), o que gera ricas discussões como a reformulação que propus para o problema 3.

Segundo as categorias dadas por Butts (1997) aos problemas podemos inferir que os problemas 2 e 11 são problemas de aplicação pois envolvem em sua resolução algoritmos aplicativos.

O traço característico desses problemas é que seu enunciado contém uma estratégia para resolvê-los. O obstáculo a vencer, então, é traduzir a palavra escrita para uma forma matemática apropriada, de maneira que algoritmos adequados possam ser aplicados. (BUTTS, 1997, p. 35).

Os problemas 2 e 11 envolvem o cálculo de porcentagens num contexto. Butts (1997) sugere que para torná-los mais interessantes devemos tornar seus dados condizentes com a realidade. Porém isto não é suficiente pois para Butts (1997) os melhores problemas de aplicação são aqueles que os próprios resolvidores colem seus dados, porém estes são um tipo de problema classificado como situação-problema.

Os problemas 10 e 12 podem ser classificados segundo Butts (1997) como problemas de pesquisa aberta pois seu enunciado não traz uma estratégia para resolvê-lo. O autor alega que esse categoria de problemas é mais utilizado em níveis superiores de ensino na forma “prove que”, “encontre todos”, “para quais” e que é um erro não propor problemas de pesquisa aberta para alunos menores. Esse tipo de problema envolve a observação de padrões e consequente formulação de conjecturas, por isso o problema 10 é um dos melhores desta lista. Segundo Butts (1997) na (re)formulação de problemas de pesquisa aberta faz-se necessário propor o problema de maneira que os alunos consigam conjecturar a solução.

Contudo a maioria dos problemas dessa primeira lista não são adequados para serem utilizados em uma aula baseada na metodologia Resolução de Problemas já que entregam muitas vezes em seu enunciado sua forma de resolução ou o novo conteúdo matemático que seria ensinado. Porém com reformulações podem gerar discussões muito pertinentes.

3 A segunda lista de problemas

A segunda atividade desenvolvida foi a resolução de uma segunda lista de problemas a qual continha uma seleção de oito problemas. Durante as aulas que nos ocupamos com esses problemas os resolvemos e discutimos suas possíveis resoluções e suas funcionalidades para o ensino. Seguem os problemas:

1. Qual dos gráficos da Figura 2 melhor se enquadra nas três histórias seguintes? Escreva uma história para o gráfico restante.
 - a) Eu tinha acabado de sair de casa, quando percebi que havia esquecido meus livros; então, eu voltei para buscá-los.
 - b) Tudo ia bem até que o pneu furou.
 - c) Eu iniciei calmamente, mas aumentei a velocidade quando me dei conta de que iria me atrasar.

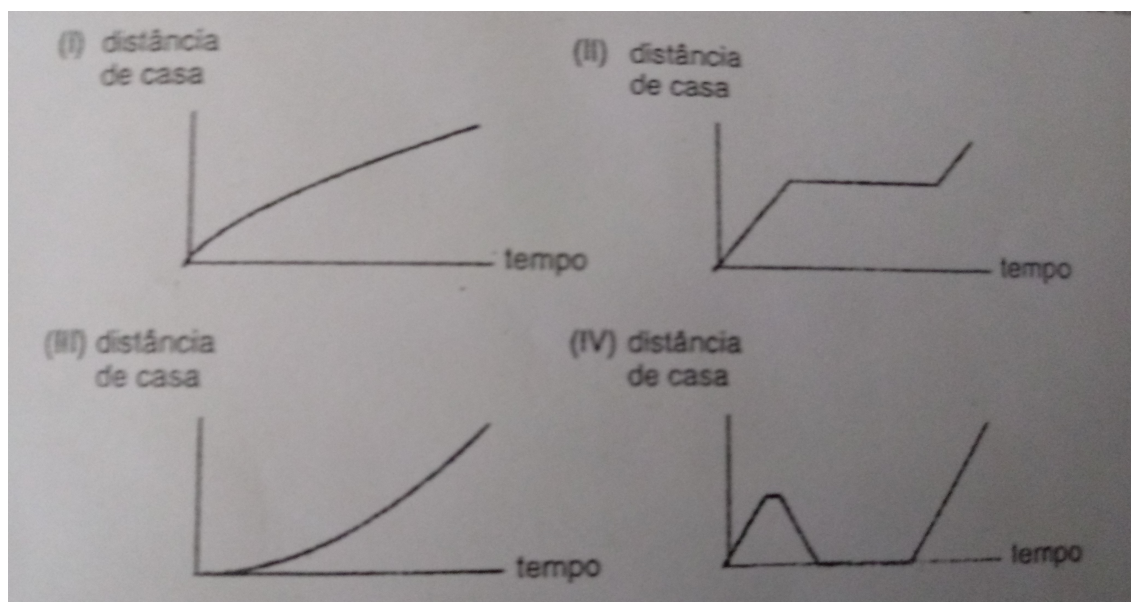


Figura 2: Gráficos

Fonte: Deborah Hughes-Hallett et al, 1997.

2. Esquentou durante toda a manhã e, de repente, ficou bem mais frio por volta do meio-dia, uma tempestade se formou. Após a tempestade esquentou novamente, antes de tornar a esfriar ao anoitecer. Esboce um possível gráfico da temperatura deste dia em função do tempo.
3. Após se aplicar uma certa droga a um paciente com batimento cardíaco acelerado, a pulsação caiu dramaticamente e, então, voltou a subir lentamente à medida que o efeito da droga foi passando. Esboce um possível gráfico da taxa de batimento cardíaco em função do tempo, a partir do momento em que a droga foi aplicada.

4. Em geral quanto mais fertilizante se usa, melhor é o rendimento de uma lavoura. Entretanto, se for colocado muito fertilizante, a lavoura fica envenenada e o rendimento cai rapidamente. Esboce um possível gráfico ilustrando o rendimento da lavoura em função da quantidade de fertilizante aplicada.
5. Descreva o que a Figura 3 lhe diz a respeito de uma linha de montagem cuja produtividade é representada em função do número de operários que ali trabalham.

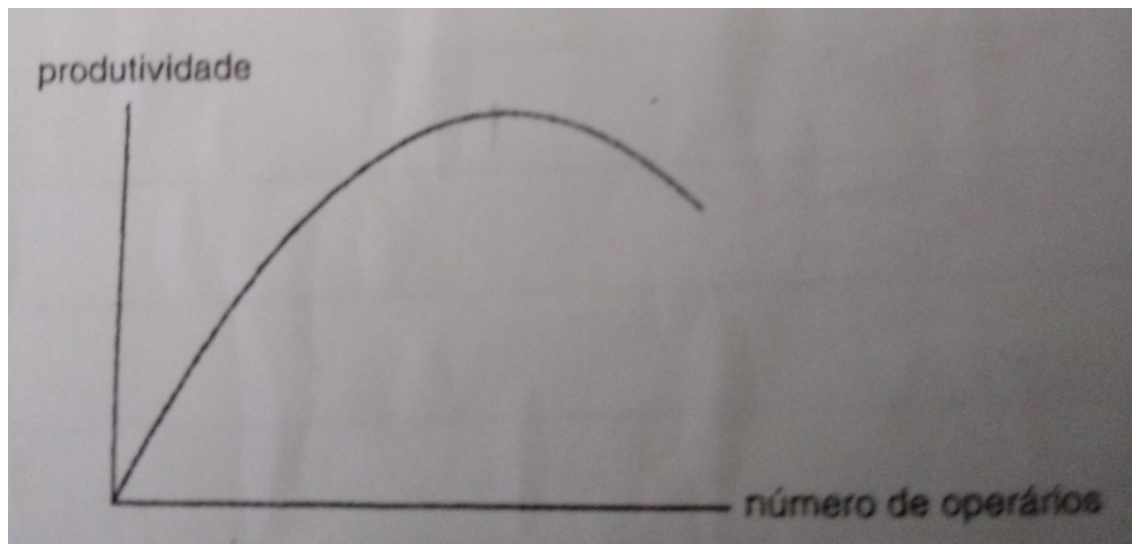


Figura 3: Gráfico

Fonte: Deborah Hughes-Hallett et al, 1997.

6. Um voo do Aeroporto de Dulles, na cidade de Washington D. C., até o Aeroporto de LaGuardia, em New York, tem que circular LaGuardia diversas vezes até obter permissão para pousar. Esboce um gráfico da distância do avião até Washington em função do tempo, desde o momento da decolagem até seu pouso.
7. Em seu Guia do Comportamento Excruciantemente Correto, a Srta. Manners afirma:
Existem três elementos em um encontro – diversão, comida e afeição – dos quais pelo menos dois tem que ser oferecidos. É costume começar uma série de encontros com uma boa quantidade de diversão, uma quantidade moderada de comida e não mais que uma mera sugestão de afeição. À medida que a quantidade de afeição aumenta, a diversão pode ser reduzida proporcionalmente. Quando a afeição tiver substituído a diversão, já não poderemos mais chamar isto de simples encontro. Em circunstância alguma a comida poderá ser omitida.
Baseado nessa afirmação, esboce um gráfico ilustrando diversão em função de afeição, supondo que a quantidade de comida permanece constante. Indique o ponto do gráfico em que o relacionamento começa, assim como aquele em que o relacionamento deixa de ser chamado de um simples encontro.
8. Quando Galileu estava formulando as leis do movimento, ele considerou o deslocamento de um corpo partindo do repouso e caindo em queda livre. Originalmente, ele pensou que a velocidade de um tal corpo era proporcional à distância já percorrida na queda. Os dados

da Figura 4 esclarecem, de alguma forma, a hipótese de Galileu? Que hipótese alternativa é sugerida pelos dois conjuntos de dados nas Tabelas 1.2 e 1.3?

TABELA 1.2						TABELA 1.3					
Distância (m)	0	1	2	3	4	Tempo (s)	0	1	2	3	4
Velocidade (m/s)	0	2,4	3,4	4,3	5	Velocidade (m/s)	0	9,8	19,6	29,4	39,2

Figura 4: Tabelas

Fonte: Deborah Hughes-Hallett et al, 1997.

Os problemas apresentados nessa lista são todos relacionados a funções. Os problemas geralmente propostos aos alunos são do tipo onde é dada a lei de formação da função e pede-se seu gráfico. Porém esses são melhores que os da primeira lista e também dos que geralmente são propostos pelos professores pois apresentam em suas resoluções diferentes tipos de raciocínios. Além disso os problemas são contextualizados, seus dados condizem com a realidade e apresentam também múltiplas respostas. Para Schoenfeld (1991, p. 9) “é bom ver múltiplas soluções: os alunos tendem a pensar que há só uma maneira de resolver qualquer problema (usualmente o método de resolução que o professor acabou de demonstrar na classe)”.

4 Os experimentos

A terceira atividade desenvolvida na disciplina foi a realização de dois experimentos. Para realizá-los utilizamos cilindros ocos de diferentes comprimentos, porém mesmo diâmetro, trenas, papel milimetrado e uma cartolina. Fixamos a cartolina em uma parede e com um dos tubos nos distanciamos dessa parede e em seguida medimos a altura da imagem que enxergávamos através do tubo. Nesse primeiro experimento a medida da imagem visualizada é função da distância em que você se encontra da parede. Para o segundo experimento utilizamos os três cilindros ocos. Dessa vez a medida da imagem visualizada é função do comprimento do tubo, mantendo fixa a distância da parede.

Esses experimentos são excelentes para introduzir o conteúdo de funções a partir da Resolução de Problemas já que possuem características consideradas fundamentais para um problema segundo Almouloud (2009):

- Os alunos entendem facilmente os dados do problema e podem se engajar na sua resolução usando seus conhecimentos disponíveis.
- Essas situações devem colocar em jogo um campo conceitual que queremos efetivamente explorar e no qual o conhecimento está inserido.
- Os conhecimentos antigos dos alunos são insuficientes para a resolução imediata do problema.
- Os conhecimentos, objeto de aprendizagem, fornecem as ferramentas as mais adequadas para obter a solução final.
- O problema pode envolver vários domínios de conhecimentos: álgebra, geometria, domínio numérico etc. (ALMOULOU, 2009, p. 994-995)

O experimento é fácil de ser compreendido e os alunos logo poderão coletar os dados necessários para a resolução deste. A situação em questão tem como resposta final uma lei de formação de uma função, o conteúdo que objetiva-se ensinar. Em sua resolução é preciso que os alunos relembrem alguns conteúdos já estudados (conhecimentos prévios) como semelhança de triângulos, razão e proporção. Além disso para resolvê-lo precisamos utilizar outros domínios de conhecimento como álgebra e geometria.

Contudo de nada adianta se o problema for resolvido e não houver nenhuma discussão sobre as resoluções e depois mais problemas que complementem e ajudem a consolidar o novo conhecimento.

O professor/aplicador deve provocar um debate de confrontação dos resultados dos alunos. Nesta fase, diversas formas de saber vão aparecer. O objetivo visado é homogeneizar e construir o saber da classe, assim como promover o progresso na aquisição individual dos conhecimentos. É importante que o professor/aplicador, após o debate, selecione e organize as descobertas dos alunos e sistematize esses novos conhecimentos e saberes a fim de promover para o aluno uma melhor compreensão desses novos objetos matemáticos. Além disso, é preciso fazer a institucionalização dos saberes novos estudados. É imprescindível ter uma fase de familiarização na qual o professor deve propor outras situações cujos objetivos é consolidar os novos conhecimentos dos alunos. (ALMOULOU, 2009, p. 995).

5 Considerações Finais

As atividades desenvolvidas durante a disciplina Resolução de Problemas e Modelagem Matemática proporcionaram a nós alunos um conhecimento mais aprofundado da tendência Resolução de Problemas, bem como analisar e reformular problemas que podem ser problemas geradores em uma aula baseada na tendência em questão. Percebemos através do experimento que construímos a partir de um problema qualquer, muitos deles retirados do próprio livro didático que geralmente é o principal apoio do professor, que somos capazes de planejar e realizar uma aula baseada na tendência Resolução de Problemas. Também não precisamos criar os problemas, os encontramos em muitos lugares, porém muitas vezes eles precisam de reformulações para se tornarem adequados aos objetivos almejados.

Quanto às perspectivas de resolução de problemas estudadas acredito que duas delas são possíveis de serem trabalhadas na escola: ensinar sobre a Resolução de Problemas e ensinar Matemática através da Resolução de Problemas. George Polya, como principal representante da concepção de ensinar sobre a Resolução de Problemas ensina fundamentos, regras e passos para se resolver um problema. Para ele a resolução de um problema exige quatro passos: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução desse plano e validação da resolução. Acredito que devemos ensinar a nossos alunos esses passos para se tornarem bons resolvedores de problemas.

Assim nós professores podemos ensinar Matemática através da Resolução de Problemas tendo problemas como ponto de partida visando a aprendizagem em relação aos conteúdos matemáticos, excluindo o incentivo a memorização de métodos e algoritmos tão presentes atu-

almente no ensino de Matemática.

Contudo o grande desafio para nós professores, independente da disciplina ministrada, é fazer com que os alunos entendam que eles são responsáveis pela própria aprendizagem. A nós professores cabe criar e organizar “meios” nos quais são desenvolvidas as situações que provocarão aprendizagens. Nesse sentido, com base na Resolução de Problemas

O professor precisa preparar, ou escolher, problemas apropriados ao conteúdo ou ao conceito que pretende construir. Precisa deixar de ser o centro das atividades, passando para os alunos a maior responsabilidade pela aprendizagem que pretendem atingir. Os alunos, por sua vez, devem entender e assumir essa responsabilidade. Esse ato exige de ambos, portanto, mudanças de atitude e postura, o que, nem sempre, é fácil conseguir. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 82).

6 Referências

- ALMOULOUD, Saddo Ag. **Atividades para o ensino de Matemática na perspectiva da Didática da Matemática**. X Encontro Paranaense de Educação Matemática (EPREM). Set. 2009.
- BUTTS, Thomas. Formulando problema adequadamente. In: KRULIK, Stephen. REYS, Robert E. **A Resolução de Problemas na Matemática escolar**. Tradução: Hygino H. Domingues, Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997, p. 32-48.
- HUGHES-HALLETT, Deborah et al. **Cálculo**. Rio de Janeiro: LTC, 1997.
- OBMEP. **Banco de questões OBMEP 2008**. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/bq/bq2008.pdf>. Acesso em: 26 out. de 2018.
- ONUCHIC, Lourdes da Rosa. ALLEVATO, Norma Suely Gomes. **Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas**. Boletim de Educação Matemática, vol. 25, núm. 41, dezembro, 2011, pp. 73-98, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Brasil.
- PARANÁ. Secretaria do Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares da Rede Pública da Educação Básica do Estado do Paraná – Matemática**. Curitiba: SEED, 2008.
- PRADO, Marlene Aparecida do. ALLEVATO, Norma Suely Gomes. O Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas. **Acta Scientiae**, v.12, n.1, p.24-42. jan./jun. 2010. Canoas, RS.
- SCHOENFELD, Alan. **Porquê toda essa agitação acerca da Resolução de Problemas**. Universidade da Califórnia, Berkeley, EUA. 1991.

Problemas de designação – formulação matemática, método de solução e aplicações

Janaina Maria de Lima Gonçalves¹
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
userjanaina@gmail.com

Rosângela Villwock
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
rosangela.unioeste@gmail.com

Resumo: O problema de designação envolve aplicações como a distribuição de pessoas para realizar determinadas tarefas. A designação pode ser de máquinas, veículos ou fábricas, por exemplo. É um problema de programação inteira e pode ser resolvido por métodos exatos ou heurísticos. Este trabalho tem como objetivo apresentar um breve referencial teórico sobre problemas de designação, bem como algumas aplicações.

Palavras-chave: Pesquisa Operacional; Programação Inteira; Otimização.

1 Introdução

O estudo sobre problemas de designação faz parte da ampla área denominada Pesquisa Operacional (PO). Segundo Arenales et al. (2011), uma definição de pesquisa operacional foi apresentada em 1967, que de forma resumida, consiste no desenvolvimento de métodos científicos de sistemas complexos, com a finalidade de prever e comparar estratégias ou decisões alternativas.

Recentemente, segundo Arenales et al. (2011), a PO tem sido chamada de ciência e tecnologia de decisão e está relacionada a ideias e processos para articular e modelar problemas de decisão, determinando os objetivos do tomador de decisão e as restrições nas quais se deve operar. Os problemas são regidos por lei, que são passíveis de serem escritas por relações matemáticas, originando modelos matemáticos.

Para Arenales et al. (2011) o modelo em PO é um objeto abstrato, que imita as principais características de um objeto real para fins de representação. Em geral, para a formulação de um modelo matemático, simplificações no sistema ou do problema real devem ser consideradas. A validação do modelo depende da solução obtida para o mesmo. Logo, o modelo matemático é uma representação de um problema real, porém, são expressos em terminologia e simbologia matemática.

Na PO, um dos modelos matemáticos mais importante é o modelo de programação linear (PL), em que todas as funções matemáticas são lineares. Para Hillier e Lieberman (2006), este

¹Acadêmica do curso de Licenciatura em Matemática, na Universidade Estadual do Oeste do Paraná, ano de 2018.

modelo envolve o planejamento de atividades para a obtenção de um resultado ótimo, com o fim de atingir o melhor objetivo especificado. Qualquer problema cujo modelo matemático se encaixe no formato genérico para o PL é um problema de PL.

Uma aplicação interessante de PL diz a respeito à estruturação de Problemas de Transporte (PT). Os problemas de PT, descritos por Puccini e Pizzolato (1990), envolvem a determinação de como transportar mercadorias de maneira otimizada e pode ser descrito como sendo concernente ao transporte de um único produto de várias origens, onde é fabricado, para muitos destinos, onde é consumido. Cada origem tem uma capacidade de produção limitada e cada destino tem uma demanda conhecida.

O Problema de Designação (PD), que pode ser visto como um caso especial do PT, é frequentemente encontrado no mundo real, porém, a resolução de um problema desta categoria, demanda um certo tempo não hábil, dependendo das restrições. Em um problema de designação, tem-se dois conjuntos: um contém o número de agentes e no outro o número de tarefas. No entanto, estes dois conjuntos, para serem relacionados, devem respeitar uma série de restrições e isto constitui um custo para a designação.

Neste trabalho pretende-se estudar o problema de designação, incluindo formulação matemática, um método de solução e aplicações.

2 O Problema de Designação

Segundo Arenales et al. (2011) o problema de designação envolve n tarefas e n agentes, sendo cada tarefa executada por um único agente e cada agente executa uma única tarefa, onde a execução de tarefa j pelo agente i tem um custo c_{ij} . O problema consiste em encontrar uma função que minimiza o custo total da designação, respeitando todas as restrições.

2.1 Formulação Matemática

O Problema de Designação pode ser visto como um caso especial do PT, onde as origens são os agentes e os destinos são as tarefas. Por este motivo, inicialmente veremos a formulação matemática de um PT, que conforme Hillier e Lieberman (2006) tem as seguintes exigências:

1. Cada origem tem uma *oferta* fixa de unidades, a qual, tem de ser distribuída aos destinos. Seja s_i o número de unidades sendo distribuído pela origem, i , para $i=1,2,\dots,m$;
2. Cada destino tem uma demanda fixa por unidades, as devem ser recebidas pelas origens. Seja s_j o número de unidades recebidas pelo destino j , $j=1,2,\dots,n$.

Um problema de transporte terá soluções viáveis se, e somente se:

$$\sum_{i=1}^m s_i = \sum_{j=1}^n s_j.$$

O custo unitário implica a seguinte hipótese básica para qualquer problema de transporte:

1. O custo de distribuição de unidades de qualquer origem para qualquer destino é diretamente proporcional ao número de unidades distribuídas. Este custo é o custo unitário de distribuição multiplicado pelo número de unidades distribuídas. Seja c_{ij} esse custo unitário por origem i e destino j .

Os dados necessários para um problema de transporte são as origens, demandas e custos unitários. Denominados por parâmetros do modelo.

O objetivo é minimizar o custo total de distribuição das unidades.

Para adaptarmos um PT com as características de um PD, é necessário reformular de maneira que satisfaça as seguintes hipóteses citadas por Hillier e Lieberman (2006):

1. O número de designados e o número de tarefas é o mesmo. Esse número é representado por n ;
2. Deve-se atribuir a cada designado exatamente uma tarefa;
3. Cada tarefa deve ser realizada exatamente por um designado;

Este problema ocorre em diversas aplicações de forma isolada ou como subproblemas de outros mais complexos.

2.2 Modelo

Segundo Goldbarg e Luna (2005), dados dois conjuntos, A e T , de tamanho igual, com função custo $c: A \times T \rightarrow \mathbb{R}$ tal que o custo seja mínimo. A função pode ser definida por $c(i, f(i))$, onde i é um agente em A , e $f(i)$ é a função f associando i a uma tarefa em T .

A função objetivo é:

$$\sum_{x \in A} c(i, f(i)).$$

É possível criar uma variável x_{ij} da seguinte maneira:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } f(i) = j \\ 0 & \text{se caso contrário} \end{cases}.$$

Neste caso, a função objetivo é definida da seguinte maneira:

$$\min \sum_{i \in A} \sum_{j \in T} c(i, j) x_{ij}.$$

Para garantir que um elemento de A seja associado a exatamente um elemento de T , temos:

$$\sum_{j \in T} x_{ij} = 1, \forall i \in A.$$

Para garantir que um elemento de T esteja associado a exatamente um elemento em A , temos:

$$\sum_{i \in A} x_{ij} = 1, \forall j \in T.$$

A variável x_{ij} deve ser binária, levando à restrição:

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, i \in A, j \in T.$$

x_{ij} assume o valor 1 quando i for associado a j e 0 caso contrário.

2.3 Um método de Solução

Segundo Puccini e Pizzolato (1990), as capacidades de cada origem e as demandas de cada destino serão unitárias, assim, o algoritmo da designação será baseado somente na seguinte matriz, chamada de “matriz de eficiência”.

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Onde as colunas são os destinos e as linhas são as origens.

O processo iterativo que conduz à solução ótima baseia-se no seguinte teorema:

“Ao se adicionar uma constante a cada elemento de uma linha (coluna) qualquer da matriz de eficiência de um problema de designação, a solução ótima da matriz alterada será também a solução ótima da matriz inicial”.

Um algoritmo clássico para a solução do PD é o Método Húngaro. Segundo Hillier e Lieberman (2006), opera diretamente sobre a matriz de eficiência do problema. Convertendo a tabela de custos original em uma série de tabelas de custos equivalentes até chegar a uma na qual uma solução ótima se torne óbvia.

A tabela de custos equivalentes é aquela formada somente por elementos positivos ou zero em que todas as designações podem ser colocadas nas posições dos elementos zero. O custo não pode ser negativo, esse conjunto de designações com um custo total igual a zero é ótimo.

Segundo Hillier e Lieberman (2006), o segredo para essa conversão é o fato de que se pode, conforme o teorema, adicionar ou subtrair qualquer constante de todos os elementos de uma linha ou coluna da tabela de custos sem alterar o problema.

O processo reduzirá linhas, que criará um zero em cada linha da tabela equivalente com um elemento zero. Se esta tabela de custos, tiver qualquer coluna sem um elemento zero, a próxima etapa é reduzir as colunas. A nova tabela de custos equivalente terá um elemento zero em cada uma das linhas e colunas. Se cada elemento zero fornecerem um conjunto de designações, então formarão uma solução ótima e o algoritmo está finalizado.

Em resumo, Hillier e Lieberman (2006), fazem a descrição algoritmo Húngaro, utilizando os seguintes passos:

1. Subtraia o menor número em cada linha de cada um dos números da linha. Introduza os resultados em uma nova tabela.
2. Subtraia o menor número em cada coluna da nova tabela de cada um dos números da coluna. Este passo é denominado redução de colunas. Introduzir os resultados em uma outra tabela.
3. Teste a possibilidade de obter uma designação ótima, determinando o número mínimo de retas necessárias para cobrir todos os zeros. Se o número de retas for igual ao número de linhas, temos um conjunto de designações ótimo. Neste caso, vá para o item 6. Caso contrário, siga com o item 4.
4. Se o número de retas for menor que o número de linhas, modifique a tabela da seguinte maneira:
 - (a) Subtraia o menor número descoberto em cada um dos números descobertos da tabela.
 - (b) Adicione o menor número descoberto aos números que se encontram nas intersecções de retas.
 - (c) Números que foram cruzados, mas não se encontram nas intersecções de retas são transferidos sem alteração para a próxima tabela.
5. Repita os itens 3 e 4, até obter-se um conjunto ótimo de designações.
6. Faça as designações uma de cada vez nas posições contendo elementos zero.

Comece com linhas ou colunas que tenham apenas um zero, já que cada linha e coluna precisam receber exatamente uma designação. Risque tanto a linha quanto a coluna envolvida após cada designação ter sido feita. Em seguida, prossiga nas linhas e colunas que ainda não foram riscadas para selecionar a próxima designação, preferencialmente dada aquela linha ou coluna que contenha apenas um zero que não foi riscado. Continue até todas as linhas e colunas terem exatamente uma designação e, portanto, terem sido cruzadas.

Para utilizar o algoritmo húngaro, o problema deve ser de minimização. Para transformar um problema de maximização em um problema de minimização, deve-se multiplicar todas as

entradas da matriz de custos por -1. Além disso, a matriz de custos precisa ser quadrada. Caso isso não aconteça, basta criar uma tarefa ou uma instalação fictícia que não interfira no resultado final.

3 Trabalhos correlatos

Nesta seção são apresentados resumos de trabalhos envolvendo problemas de designação, porém não exclusivamente.

O texto das aplicações devem ser reformulados na íntegra utilizando como base a aplicação 3.1 abaixo.

3.1 Alocação de equipes em uma panificadora

No trabalho de Triches, Kripka e Boscardin (2015), levanta-se o questionamento: dado um grupo de desenvolvedores disponíveis e um conjunto de atividades, como alocar os recursos e como sequenciar as atividades de forma a trazer maiores benefícios à organização? Segundo os autores, o bom gerenciamento de recursos é um ponto-chave para o sucesso de um projeto.

Neste trabalho foi apresentado um problema formulado por meio de um PD em que se obteve uma melhor distribuição das tarefas realizadas. Foi levado em consideração vários aspectos importantes como o tempo das atividades e as habilidades requeridas para sua prática, os recursos humanos disponíveis, sua carga horária de trabalho e capacidade. Os autores criaram uma formulação matemática para a resolução do problema como um problema de otimização linear, buscando minimizar o tempo ocioso dos funcionários.

Segundo os autores, tendo em vista as inúmeras atividades a serem desenvolvidas em uma panificadora, bem como suas variáveis: tempo, habilidade requerida, carga horária, número de funcionários e a movimentação de vendas, o gerente buscou desenvolver um cronograma diário otimizado, alocando recursos para as atividades e otimização do horário de trabalho dos funcionários. O gerente fez isso baseando-se em seu conhecimento, experiência e intuição.

Para a elaboração do cronograma, são entradas básicas:

1. Uma lista de atividades, incluindo seus atributos, sua interdependências e o esforço estimado para sua realização;
2. os recursos necessários e suas especificações, as quais variam de acordo com a área de aplicação do projeto, as especificações das habilidades, experiência pessoal e disponibilidade;
3. outras informações gerenciais, como escopo do projeto, plano de gerenciamento, riscos etc.

São aspectos considerados na formulação do problema:

1. **Tarefas:** considera como tarefa quaisquer atividades que precisem ser executadas por recursos humanos para a completude do projeto.
2. **Recursos humanos:** são consideradas as habilidades e experiências individuais, disponibilidade e tipo de trabalho.
3. **Habilidades e experiências individuais:** são quaisquer requisitos pessoais que uma tarefa possa precisar para ser executada.

Cada tarefa possui um conjunto de requisitos exigidos, enquanto cada recurso possui suas habilidades, incluindo seu nível de proficiência em cada uma. Cada recurso possui algum ou nenhum grau de experiência em cada uma das tarefas a serem executadas.

O problema dado, pode ser resumido da seguinte maneira:

1. **Objetivo:** Minimização do tempo ocioso dos funcionários;
2. **Variáveis do projeto:** O tempo de cada atividade atribuído a cada funcionário;
3. **Restrições:** As atividades devem ser integralmente cumpridas e a carga de trabalho de cada funcionário deve ser respeitada;
4. **Dados do problema:** As habilidades requeridas por cada tarefa e quem pode desempenhá-las, além do tempo máximo de trabalho de cada funcionário.

Sejam X_{ij} a quantidade de minutos atribuída de cada atividade i ao funcionário j . Cada variável X_{ij} pode assumir o valor zero ao final do processo, ou diferente de zero, indicando os minutos dessa atividade a cargo do funcionário.

Os autores relataram que, do ponto de vista do problema de otimização formulado, tal problema retorna uma solução infactível. No entanto, ao analisá-lo, as restrições acerca da distribuição de tarefas e as atividades que requeriam uma habilidade específica do funcionário, foram atendidas. Também, constatou-se que algumas atividades que antes eram desempenhadas por diversos funcionários, ficaram concentradas em um número menor de agentes.

Por fim, os autores concluírem que, a formulação da distribuição das atividades como um problema de otimização propiciou um melhor aproveitamento dos recursos humanos da padaria, evitando o desgaste físico e psicológico dos funcionários sobrecarregados, motivando-os a permanecerem na empresa e aumentando seu rendimento no trabalho.

3.2 Distribuição da carga horária de professores

A distribuição de turmas ou disciplinas para professores é realizada no início do ano letivo ou no fim do ano letivo anterior. No caso das escolas municipais, segundo Goés (2005), algumas restrições por parte do desenvolvimento pedagógico da turma e questões operacionais, devem ser atendidas. As restrições são as seguintes:

1. Uma turma não poderá ter mais que duas aulas, da mesma disciplina, ministradas no mesmo dia;
2. A carga horária diária da turma deve ser satisfeita (5 h/a), bem como a carga semanal (25 h/a);
3. A carga horária semanal do professor deve ser contemplada;
4. A carga horária semanal de uma disciplina em cada turma deve ser satisfeita;
5. Nenhuma disciplina poderá ter mais de um professor na mesma turma;
6. Em cada horário não poderá ter mais que um professor na turma;
7. Em cada horário o professor não poderá ministrar aulas para mais de uma turma.

Devem ser consideradas a disponibilidade e preferência do professor. Desse modo, temos as seguintes restrições:

1. Preferência por aulas geminadas ou não;
2. Preferência por dias de trabalho;
3. Preferência por turmas.

As turmas são designadas em acordo comum com os professores da disciplina. De acordo com o autor, o problema maior na geração da carga horária para escola da rede municipal é a designação dos dias que o professor deverá trabalhar, sendo que estes dias não podem coincidir com o dia da hora-atividade, e ainda, deve satisfazer a preferência da maioria dos professores em relação a sua opção para o dia de não vínculo.

3.3 Distribuição da salas em um centro científico

Para a formulação do problema, Campos (2012) propõe a análise de três hipóteses. São elas:

1. As turmas já estão designadas para um determinado horário do dia;
2. Existência de salas suficientes de tamanho apropriado para acomodar todas as turmas em todos os períodos;
3. Professores já estão designados para determinadas turmas com seus respectivos horários do dia.

Para Campos (2012), o problema de designação de salas de aula, então, consiste em alocar essas turmas para salas disponíveis em seus respectivos horários diários. Cada sala recebe

a alocação de no máximo uma turma no seu respectivo horário, isto é, deve-se prevenir de alguma sala ter mais de uma turma no mesmo horário.

Segundo o autor, algumas turmas não necessitam de salas. Todavia, daquelas que necessitam, cada uma deve ser alocada para exatamente uma sala respeitando sua capacidade. Ainda, o custo é dado em forma de peso para algumas características presentes em cada sala de aula, como a existência e não existência de: ruídos, temperatura elevada e projetor.

Conclusões

Os PD e suas respectivas soluções, em geral, são consideradas complexas, uma vez que a solução ótima terá que atender todas as restrições impostas. Desta forma, as implementações e obtenções de resultados demandam tempo e recurso tecnológico.

Para a alocação de recursos e equipes, o PD é comumente utilizado. Nos problemas citados, as soluções encontradas atenderam as expectativas dos autores e demais colaboradores. O tempo gasto na formulação e análise das restrições foram compensados.

Neste trabalho buscou-se apresentar o PD e a sua aplicabilidade no cotidiano. Pretende-se como trabalhos futuros, buscar novas aplicações e algoritmos de solução, visando posterior aplicação.

Referências

- ARENALES, M. et al. **Pesquisa Operacional**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2011.
- CAMPOS, G. R. J. **Sobre o problema de designação de salas de aula para a PUC Goiás: um estudo de caso para a área 3, campus I**. Dissertação (mestrado) – Universidade Católica de Goiás. Goiânia, 2012.
- HILLIER F.S.; LIEBERMAN, G.J. **Introdução à Pesquisa Operacional**. 8. ed., São Paulo: McGraw-Hill, 2006.
- GOÉS, A. R. T. **Otimização na distribuição da carga horária de professores – método exato, método heurístico, método misto e interface**. Dissertação (Mestrado) - Departamento de matemática, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2005.
- GOLDBARG, M. C.; LUNA, H. P. L. **Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.
- PUCCINI, A. L.; PIZZOLATO, N. D. **Introdução à programação linear**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1990.
- TRICHES, J.; KRIPKA, M.; BOSCARDIN, I. **Otimização aplicada ao problema de alocação de equipes em uma panificadora**. São Paulo: Exacta, 2015.

Reflexões sobre alguns enunciados sob a perspectiva da resolução de problemas

Alexandre Batista de Souza
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
aledaron@gmail.com

Joel Ireno Branco
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
j.i.branco@hotmail.com

Resumo: Este trabalho reflete sobre a resolução de problemas analisando alguns enunciados e atividades, salientando aspectos teóricos da literatura da área para caracterizá-los ressaltando as situações-problema e os projetos de problemas geradores.

Palavras-chave: Resolução de Problemas; Reformulação de Problemas; Problemas Geradores.

1 Introdução

Este trabalho objetiva fazer uma reflexão, tendo em vista a literatura sobre o tema, de algumas atividades envolvendo a Resolução de Problemas. Com enunciados e figuras, apresentamos alguns problemas, e procuramos relacioná-los as denominações e conceitos presentes na literatura. Observou-se que grande parte dos problemas analisados são na verdade situações-problema e podem ser caracterizados como projetos de problemas geradores. Podemos dizer que a Resolução de Problemas aparece historicamente com Polya (1995), e após um período de grande influência do movimento da matemática moderna na década de 70, essa metodologia tem sido recomendada tanto por pesquisadores da educação como diretrizes curriculares nacionais e internacionais.

A Resolução de Problemas pode ser vista, segundo Krulick (1997) como meta, em que resolver problemas é a principal razão do ensino da matemática, como processo, que consiste em estratégias, procedimentos e heurísticas para a resolução de problemas, e por fim, como habilidade básica de todo cidadão. Os educadores matemáticos podem ensinar sobre a Resolução de Problemas, que consiste em embasar teoricamente a metodologia, ensinar para resolver problemas, que consiste em fornecer habilidades básicas para enfrentar problemas e ensinar através da Resolução de Problemas, assim como preconizada por Onuchic e Allevato (2011). Ainda cabe destacar que, que um problema é tudo aquilo que não se sabe fazer a princípio, mas se deseja fazer.

Sendo assim, este trabalho se divide em 6 seções com esta introdução. Nas seções 2 e 3, fazemos uma discussão acerca de problemas apresentados em forma de “lista de problemas”, em geral sobre teoria dos números e funções. Na seção 4 tratamos de aplicações e experimentos capazes de culminar na formalização do conceito de funções (projetos de problemas geradores). Na

seção 5, abordamos a reformulação de um problema de geometria diferencial, dando mais “imaginação” ao mesmo. Na seção 6 fazemos algumas considerações em especial, ressaltando algumas características interessantes da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

2 Analisando alguns enunciados

Considere os seguintes enunciados:

- 1- Sabendo que $144 \cdot 177 = 25488$ podemos concluir que $\frac{254,88}{0,177}$ é igual a:
- 2- Num teste com 84 questões se você acerta 58/84 das questões, então qual é seu percentual de acertos?
- 3 – Quantas frações menores do que 1 existem, tais que o numerador e denominador são números naturais de um algarismo?
- 4 – Quantos são os números que ao dividir 2007 deixam resto 5?
- 5 – Sabemos que dois pontos distintos em um plano determinam um e somente uma reta. Quantas retas são determinadas por nove pontos distintos?
- 6 - Os números 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 e 9 foram escritos (em uma ordem desconhecida) ao redor de uma circunferência. Lendo esses números de 3 em 3 no sentido horário, formam-se 9 números de três algarismos. Determine a soma desses 9 números.
- 7 - Um número quando dividido por 3, tem resto 1; por 4 tem resto 2; por 5 tem resto 3; por 6, tem resto 4. Qual o menor número inteiro positivo que satisfaz tais propriedades?
- 8 – Calcule a soma: $S = 1/(1.2) + 1/(2.3) + 1/(3.4) + \dots + 1/(2006.2007) + 1/(2007.2008)$.
- 9 - Escolha dois números inteiros. Encontre sua soma e a diferença não negativa entre eles. Some esses resultados. Alguma observação? 10 - Seja $S_n = \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$. Para que tipo de inteiros, n , pode-se efetuar uma partição em S_n em dois subconjuntos de modo que a soma dos elementos de cada subconjunto seja a mesma? Por Exemplo $S_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ pode ser dividido em $\{1, 6, 7\}$ e $\{2, 3, 4, 5\}$.
- 11 – Aumentando - se a base e a altura de um retângulo em 20 por cento, em que porcentagem a área aumentará?
- 12 – Numa corrida de São Paulo a Fortaleza participam quatro carros A, B, C, D que largaram na seguinte ordem: primeiro A, segundo B, terceiro C e por último D. Durante a corrida, A e B trocaram de posição (ultrapassaram um ao outro) 9 vezes e B e C trocaram de posição 8 vezes. Para saber em que ordem chegaram à Fortaleza, só é permitido fazer perguntas do tipo: Quantas vezes trocaram de posição os carros X e Y? Antes de fazer uma pergunta se conhece a resposta da pergunta anterior. Formule três perguntas que permitam determinar a ordem em que os quatro terminaram a corrida.

Podemos dizer que, quando nos foi dado a lista acima para resolução, estes pro-

blemas se caracterizavam efetivamente como problemas, uma vez que, não nos foi apresentado anteriormente conceitos próprios para resolvê-los, e então a princípio eram situações que não sabíamos fazer, mas estávamos interessados (ALLEVATO, 2013). Segundo Butts (1997), podemos caracterizar os problemas em: problemas de reconhecimento, algorítmicos, de aplicação, pesquisa aberta e situação-problema. Os problemas 1, 2, 6, 8, 9 podem ser caracterizados como problemas algorítmicos pois os seus enunciados sugerem a aplicação de algoritmo. Por exemplo, no exercício 8 é necessário a manipulação do algoritmo da soma de frações assim como o algoritmo da multiplicação de frações, que possibilita reescrever a soma dada por $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1/3 - 1/3 + \dots + 1/2006 + 1/2007 - 1/2007 + 1/2008$ solucionando o problema.

O problema 6 pede para dispor números de 1 a 9 em volta de uma circunferência e somar os nove números de 3 algarismos formados por uma sequência no sentido horário. É necessário observar que independente da disposição em volta da circunferência a soma dos números formados era a mesma, o que demandava do resolvidor um conhecimento do algoritmo da divisão. Cabe destacar que o problema 9 é caracterizado como algorítmico pelo próprio autor. Os problemas 3, 4, 5, 7 e 10 tem características de problemas de pesquisa aberta, já que em seus enunciados não há uma estratégia clara para resolvê-los e em geral se expressam perguntas do tipo: “quantos são...”, “para que tipo de inteiros...”, (BUTTS, 1997). Um exemplo neste caso, pode ser o problema 4 que diz o seguinte: Quantos são os números que ao dividir 2007 deixam resto 5? . Apesar de ser possível utilizar o algoritmo da divisão, era necessário conjecturar – por tentativa e erro - quais os números p, q que satisfazem $2007 = p.q + 5$. Somente a partir disto, foi possível verificar que o problema se relacionava com a decomposição em fatores primos, sendo possível mostrar os números que satisfazem a equação. O problema 7 pode sugerir aparentemente a utilização de congruência módulo m - conhecido também como classe de restos na divisão por m - bem como o teorema chinês do resto - que se refere ao sistema de equações congruência módulo m - mas no entanto verifica-se que as hipóteses deste teorema não são atendidas pelas condições do problema (os restos tem que ser primos entre si). Um caminho de resolução é relacionar as incógnitas através do algoritmo da divisão, e utilizar tentativa e erro. É possível também observar o máximo divisor comum entre os divisores dados e por tentativa e erro determinar valor pedido. Observa-se assim, que não havia um caminho claro dado no enunciado, devido as diferentes resoluções. Vale dizer que o problema 10 é caracterizado como problema de pesquisa aberta pelo próprio autor.

Notamos que o problema 11 se caracteriza como problema de aplicação – em consonância com o próprio autor – uma vez que requer algoritmos de aplicação para uma questão geométrica que pode responder problemas práticos. Por fim o problema 12 pode ser caracterizado como situação-problema, já que entre outras coisas, para resolvê-lo, é preciso formular e responder perguntas (problemas) adequadas que levariam a solução, sendo caracterizado assim como uma situação que consiste de uma gama de problemas adjacentes que envolvem um ou vários tipos de conhecimento (BUTTS, 1997). A grosso modo o problema fala de uma corrida em que participam quatro carros, e após um número de trocas é solicitado que se identifique a ordem em que chegaram os carros no destino. Ao final do problema é dito assim: “Antes de fazer uma pergunta se conhece a resposta da pergunta anterior. Formule três perguntas que permitam

determinar a ordem em que os quatro terminaram a corrida”.

3 Representações gráficas

Os problemas que apresentaremos neste segundo momento, reforçam entre outras coisas, o caráter geométrico inerente ao estudo de funções, tendo em vista a possibilidade e necessidade de se utilizar da representação gráfica ao se ensinar este tema. Apesar de ter sido colocada em segundo plano em fases da história da educação matemática que se dava muita ênfase à álgebra, notamos que atualmente há um resgate da geometria no ensino escolar e isto pode ser visto pela mudança de postura dos professores no contexto da escola, assim como uma abordagem mais geométrica presente também nos livros didáticos (ALLEVATO, 2013). É importante lembrar que ainda segundo Allevato (2013) as diretrizes curriculares nacionais, ressaltam que o estudo de estruturas geométricas devem se dar, inicialmente pela intuição e observação, sendo seguidas de manipulações adequadas que permitam observar propriedades. Também, observamos no primeiro dos quatro passos para resolver problemas de Polya(1995), que a compreensão de um problema para sua posterior planificação, passa muitas vezes por um esboço ou representação geométrica. Cabe destacar que, atualmente mesmo alguns professores ditos da “matemática pura”, demandam que seus alunos de iniciação científica, ao demonstrar teoremas e verificar passagens, façam desenhos e representações geométricas para orientar o pensamento e a intuição. Sendo assim, o estudo de funções pode ser iniciado pelo estudo gráfico sendo que as propriedades inerentes às mesmas possam ser deduzidas devido ao apelo geométrico.

Podemos dizer também que os problemas que foram apresentados nesta oportunidade tem características de situação-problema, já que a leitura e análise gráfica, assim como o esboço de gráficos, envolvem vários domínios do saber e do conhecimento (ALMOULOU, 2009), como correlação entre variáveis, taxas de variação e sua interpretação geométrica, pontos de máximo e/ou mínimo.

Passaremos agora a tratar dos problemas, os quais serão enunciados ao longo do texto de maneira indireta. O primeiro problema trata-se de relacionar gráficos com determinadas situações do cotidiano e inventar uma situação para o mesmo. Este problema – que por sinal caiu em uma edição do Enem – demanda dos alunos que estes entendam a relação de variação entre as variáveis, ou seja, quanto varia a variável dependente, dado uma variação na variável independente. Possibilita diversas interpretações – fato pelo qual na prova do Enem este problema se apresenta mais fechado do que apresentado em sala de aula – devido à subjetividade do resolvido. É possível fazer o recíproco: solicitar que o aluno que esboce graficamente uma situação que lhe é apresentada nos respectivos enunciados, demandando dos mesmos que eles façam a relação adequada entre variável dependente e variável independente. Portanto tais problemas tem o potencial de desencadear o conceito de função partindo de uma representação gráfica mais concreta para se chegar a propriedades mais gerais deste objeto matemático. Tendo em vista que consideramos os problemas de 1 a 5 como problemas geradores – aqueles capazes de em seu processo de resolução levar à construção de conceitos matemáticos desejados (Onuchic; Allevato, 2011) – estes podem dar início a aulas tendo em vista que gostaríamos de formalizar o

conceito de funções, assim como as relações entre variável dependente e variável independente, pontos de máximo e mínimo e esboço de gráficos. Podemos também relacionar produtividade em função do número de operários e apresentar um gráfico em forma de parábola para representar a situação, solicitando assim uma análise qualitativa dado o gráfico. A partir disso temos uma linha para trabalhar a formalização de máximo de uma função, assim como a ideia de taxas crescentes e decrescentes de produtividade. Intuitivamente esse gráfico poderia representar a situação em que se está construindo uma casa e para isto aumentamos o número de pedreiros, até um ponto em que a produtividade começa a cair, devido entre outros fatores, pela falta de espaço físico para “tantos pedreiros”. Logo é de se conjecturar que este problema se enquadra como um problema gerador.

Considere o problema com seguinte enunciado: “Esquentou durante toda a manhã e, de repente, ficou bem mais frio por volta do meio-dia, quando uma tempestade se formou. Após a tempestade esquentou novamente, antes de tornar a resfriar ao anoitecer. Esboce um possível gráfico da temperatura desse dia em função do tempo”. Com este problema é possível trabalhar com a ideia de crescimento e decrescimento de funções, culminando na formalização do conceito de coeficiente da incógnita de maior grau, que no caso das funções de primeiro e segundo grau, determinam a configuração gráfica dessas funções.

4 Experimentos

Considere o experimento que consiste em enxergar uma imagem, por um cano de pvc, que está a uma certa distância da parede. A medida da imagem visualizada é função da distância em que você se encontra da parede. Consideremos a distância que você se encontra da parede como sendo a variável independente e a medida da imagem que você enxerga como a variável dependente.

Solicita-se então que a variação da distância da parede e a observação dos resultados em em uma tabela, em cada caso, qual é o valor observado na parede pelo cano. Observamos que ao plotar os dados num gráfico há, aparentemente um comportamento linear crescente. É possível também generalizar tal resultado e a partir de relações geométricas explicar o comportamento linear obtido na representação gráfica. Nota-se assim que a partir de semelhanças de triângulos, a relação que regia a variação do valor observado na parede em função da variação da distância da parede era dada por uma função linear.

Podemos dizer portanto que este experimento é uma situação-problema pois envolve uma gama de problemas subjacentes – como a representação em tabela e gráfica e a aplicação de semelhança de triângulos para deduzir a função que descreve o fenômeno – que demandam elementos de um ou vários domínios do conhecimento (ALMOULOU, 2009). Também se caracteriza como situação-problema, pois o professor, em uma situação-problema como essa, faz o papel de mediador e orientador, guiando as conjecturas dos alunos e possibilitando a eles se expressar e discutir em grupo. Este experimento pode ser caracterizado também, como um problema gerador (situação-problema geradora), na perspectiva de Onuchic e Allevato (2011),

já que possibilita gerar, ao longo de sua resolução, o conceito de função linear, que pode ser formalizado ao final do experimento. Cabe destacar ainda, que pode se utilizar na condução das atividades mesmo implicitamente, a dialética ferramenta objeto, uma vez que, pois entre outras coisas, a construção gráfica que foi objeto num primeiro momento do experimento passou a status de ferramenta ao possibilitar inferir que a função que rege a situação dada é uma função linear, destacando assim o caráter cíclico e dialético do processo de condução das atividades.

Vale dizer que é possível ensinar funções com um conjunto de situações-problema dado por experimentos similares aos resolvedores, e após uma sequência de atividades de resolução, fazer a formalização conjunta dos conceitos sobre as funções abordadas por estas situações-problema. Em fim, podemos dizer que esta sequência de encaminhamentos em sala de aula – dada inicialmente por um problema gerador, culminando na geração de conceitos – pode ser caracterizada pelo ensino através da Resolução de Problemas (ONUCHIC e ALLEVATO, 2011). Outro experimento que pode ser utilizado para o ensino de volumes envolvendo cones e cilindros retos é o seguinte: Dado um cilindro e um cone de mesma área da base e altura e um recipiente com água solicitamos que o resolvidor faça medidas aproximadas e calcule o volume do cilindro, dado que o mesmo já conheça a fórmula para isto. A partir disso solicitaremos que tentem medir o volume do cone com base no valor obtido para o volume do cilindro utilizando a água do recipiente. O objetivo é mostrar que para encher um cilindro por completo é necessário três recipientes cheios de água com o formato de um cone de mesma base e mesma altura que o cilindro. Para nortear tal empreitada fornecemos o seguinte roteiro de atividades:

- 1 – Quais as relações entre o cone e o cilindro que vocês receberam? É possível compará-los de alguma forma?
- 2 – Intuitivamente qual dos objetos tem mais capacidade de armazenamento (maior volume)? Explique o seu raciocínio.
- 3 – Utilizando a régua calculem a medida aproximada do diâmetro, raio e altura do cone e do cilindro.
- 4 – Obtenham a medida da área lateral interna aproximada do cone e do cilindro.
- 5 – Obtenham o volume do cilindro e explique porque a fórmula que você utilizou é válida.
- 6 – Com a água e o cilindro encontrem o valor aproximado do volume do cone. Explique como obteve tal valor.
- 7- Quais as relações que vocês encontraram entre o volume do cone e o volume do cilindro. Expliquem matematicamente tal relação.

Após o roteiro de atividades o professor dispõe a lousa com os resultados de cada grupo, salientando que a relação aproximada para o volume do cone é um terço do volume do cilindro de mesma área de base e altura. Observamos que tal atividade se enquadra, dessa maneira nos nove passos preconizados por Onuchic e Alevatto (2011) para o ensino baseado na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

5 Reformulando problemas

Ao conceituar problemas de pesquisa aberta Butts (1997), argumenta que em geral os problemas de pesquisa aberta presentes nos livros de matemática universitária são expressos sem imaginação e poderiam ser melhorados. Há um problema interessante em Geometria Diferencial, escrito por Carmo(2005). De um ponto de vista bem matemático o problema é apresentado com intuição geométrica e poderíamos dizer que em seu enunciado há uma boa dose de imaginação, podendo ser caracterizado como exceção na colocação de Butts.

Em linhas gerais o problema pede para considerar uma curva parametrizada diferenciável no espaço tridimensional, assim como uma partição de seu domínio, que é um intervalo real, e tomar como norma da partição o comprimento do maior intervalo que compõe a partição. Geometricamente, podemos ver que este processo determina uma linha poligonal aberta inscrita na curva, cujo o comprimento aproxima o comprimento da curva em questão. O problema pede para mostrar que quanto mais refinada a partição mais próximo o comprimento da curva ficava de uma integral definida da norma do vetor velocidade associado a curva.

Na reformulação do problema solicitamos aos alunos que com o auxílio de barbantes medindo 4 metros disponham este em forma de curva no chão e com um giz representem o seu traço (façam uma curva bem "torta"). Em seguida, com uma trena travada em 1 metro aproximem a medida do comprimento da curva, ou seja; ajustem os segmentos de 1 metro a curva dada, e somem quantos segmentos de 1 metro "cabem" na curva em questão. Novamente, agora com a trena travada em $\frac{1}{2}$ metros aproximem a medida do comprimento da curva, tentando ajustar os segmentos de $\frac{1}{2}$ metros a curva dada, e somem quantos segmentos de $\frac{1}{2}$ metros "cabem" na mesma. Repita este processo 6 vezes e observem o que ocorre com a soma dos segmentos em cada caso.

Para organizar os dados obtidos, façam uma tabela relacionando a medida da trena, em cada caso, com a soma dessas medidas. É possível concluir que se este processo se repetir infinitamente a soma das medidas dos segmentos nos dá o comprimento da curva em questão? Podemos dizer que nessa reformulação, segue em parte o axioma da (re)formulação de problemas, preconizado por Butts(1997), que diz que o problema deve ser proposto de tal forma que exija conjecturas de quem resolve, já que entre outros motivos, foram excluídas as palavras do tipo "prove que", e o processo de medição e representação geométrica pode fomentar a possibilidade de conjecturas sobre a questão central, de que se repetir o processo de medição indefinidamente então teríamos o comprimento real da curva dada. Pode-se considerar também que esta reformulação se encaixa no conceito de situações-problema, uma vez que pode ser caracterizada como um conjunto de problemas – medir, ajustar os segmentos a curva, encontrar uma maneira de fazer indefinidamente – que demandam conceitos de alguns domínios do saber e do conhecimento. Vale observar que trabalha a ideia intuitiva de ajuste da linha poligonal, nos possibilite calcular o comprimento da curva, que é uma ideia mais formal (da intuição para o formal).

6 Considerações

Refletir e estudar Educação Matemática é condição básica para a atuação do professor de Matemática, tanto na educação básica quanto na graduação e pós-graduação. Embasados tanto nos estudiosos da área como nas recomendações curriculares internacionais e nacionais, devemos persegui-la e aperfeiçoá-la – de maneira consciente - tendo em vista as novas demandas educacionais e tecnológicas do nosso tempo. Sendo assim, é possível considerar que boa parte dos enunciados apresentados como problemas modelo de Educação Matemática aplicáveis em sequencias didáticas assim como vislumbrar a possibilidade de se encontrar um método mais ou menos claro, não tão rígido, baseado na Resolução de Problemas, para se estudar e testar futuras aplicações como metodologia. Essa clareza, pode ser observada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas metodologia que preconiza etapas propostas por Onuchic e Alevatto (2011) – preparação do problema(encontrar problemas geradores), leitura individual, leitura em grupo, resolução do problema, observar e incentivar, registro na lousa, plenária, busca do consenso e formalização do conteúdo – já que entre outros motivos sugerem etapas, mais ou menos claras para se trabalhar através da Resolução de Problemas e visam trabalhar com problemas geradores (que teoricamente parecem ter um poder fantástico), capazes de culminarem em conceitos matemáticos desejados, os quais quero aprofundar meus estudos. Vale destacar que a Resolução de Problemas como Metodologia, é mais desenvolvida e fácil de se trabalhar cotidianamente, quando comparada com as novas tendências em educação matemática, como a Investigação Matemática e a Modelagem Matemática. Vale dizer ainda que, em comparação com a proposta clássica de Polya(1995), a metodologia em questão avança, tendo em vista que as etapas propostas pela Arte de Resolver Problemas, procurar dados expostos no enunciado e empregar procedimentos previamente conhecidos, para se resolver um problema, o que pode limitar a capacidade de uma situação-problema (Allevato, 2013).

Referências

- ALLEVATO, Norma Suely Gomes; PRADO, Marlene Aparecida Do. O ensino-aprendizagem-avaliação de geometria através da resolução de problemas. *Acta Scientiae*, Canoas, v. 12, n. 1, p.24-42, jan./jul. 2010.
- CARMO, Manfredo Perdigão Do. **Geometria diferencial de curvas e superfícies**. 3 ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005. 607 p.
- KRULIK, Stephen; REYS, E.; ROBERT, . **Resolução de problemas na matemática escolar**. São Paulo: Atual, 1997. 360 p.
- ONUCHIC, Lourdes De La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Unesp, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.
- POLYA, George. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Rio de janeiro: Interciência, 1995. 196 p

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Atividades para o ensino da matemática na perspectiva da didática da matemática.** Encontro parananense de Educação Matemática, Assis Chateaubriand, p.992-1002, ago. 2009.

Uma relação entre superfícies mínimas e superfícies de área mínima.

Mariana da Rosa¹

Universidade Estadual do Oeste do Paraná
marianabernartt@hotmail.com

Paulo D. Conejo

Universidade Estadual do Oeste do Paraná
pconejo33@gmail.com

Resumo: Neste trabalho, é realizado uma breve introdução aos elementos da Geometria Diferencial, tendo como objetivo, mostrar a relação entre superfície mínimas e superfícies de área mínima.

Palavras-chave: Geometria Diferencial; Curvatura Média; Superfície Mínima.

1 Introdução

A Geometria Diferencial é uma área da matemática que estuda a geometria por meio do cálculo diferencial e integral, sendo uma área com fortes implicações na astronomia, cartografia e até mesmo na teoria da relatividade.

Dentre seus diversos campos, temos as superfícies mínimas, nomenclatura que segundo Carmo 2014 (p.234), é devida ao problema proposto por Lagrange em 1760: determinar uma superfície que tenha a menor área, ou seja área mínima, a qual tem uma curva fechada C como fronteira. Este problema foi proposto como um exemplo de um método desenvolvido para obter curvas ou superfícies que minimizassem certas quantidades, tais como área, comprimento, energia, etc.

Apenas em 1831 foi introduzido o conceito de curvatura média como sendo a média aritmética das curvaturas principais, que em geral, denotamos por

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Historicamente superfície mínima é àquela que tem curvatura média constante $H = 0$. Está nomenclatura é devida a essas Superfícies mínimas terem a menor área entre todas as superfícies delimitadas por uma curva C fechada no espaço.

Para este estudo, em um primeiro momento, introduzimos alguns conceitos de geometria diferencial, que serviram como base para este trabalho. Na Seção 3 daremos um tratamento para curvas e superfícies do ponto de vista geométrico, não sendo mais necessário nos preocuparmos com o espaço ambiente, para o tratamento de curvas e superfícies. Também, trataremos de

¹Este trabalho não seria possível sem o apoio financeiro da Fundação Araucária

algumas métricas, como a área de uma superfície, essencial para nosso trabalho. Na Seção 4, abordaremos a segunda forma fundamental, podendo assim ser introduzidas as curvaturas principais, também, mostraremos como calcular a curvatura Gaussiana e a curvatura média. Já na Seção 5 definiremos o que é uma superfície mínima, então, mostraremos a relação entre superfícies mínimas e áreas mínimas.

2 Preliminares

Neste primeiro momento, introduzimos o conceito de superfície regular. Intuitivamente podemos dizer que uma superfície regular pode ser obtida tomando pedaços de um plano deformando-os e juntando-os entre si formando assim uma estrutura lisa, na qual exista um plano tangente em cada um dos seus pontos. Mas, para que possamos ter essa estrutura lisa são necessárias algumas exigências. Motivando a definição seguinte.

Definição 1. Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma *superfície regular*, se $\forall p \in S, \exists V \subset \mathbb{R}^3$ e $X : U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto V \cap S$, com U aberto e $V \cap S$ aberto do $\mathbb{R}^3$, tal que:

- i) X é diferenciável;
- ii) X é um homeomorfismo;
- iii) $\forall p \in U, dX_q$ é injetiva.

Observemos que a condição i) nos diz que a aplicação X tem as derivadas parciais das suas funções coordenadas contínuas de todas as ordens, isto é, $X \in C^\infty$. Também, ii) nos garante que $X^{-1} : V \cap S \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ existe e é contínua. Por fim, iii) garante que a superfície regular não tenha auto-intersecções. Também de álgebra linear temos que a condição iii) é equivalente ao produto vetorial ser diferente do vetor nulo ($X_u \wedge X_v \neq 0$), ou alguma das matrizes Jacobianas de X tem determinante não nulo, $(JX(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)} \neq 0)$.

A aplicação da Definição 1, $X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, é denominada de parametrização ou sistema de coordenadas locais de uma vizinhança $V \cap S$ de um ponto p . A vizinhança $V \cap S$ é dita vizinhança coordenada de S . Uma superfície regular é um objeto que permite em cada vizinhança de seus pontos uma parametrização X .

Exemplo 1. A esfera unitária de $\mathbb{R}^3$ dada por $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ é uma superfície regular. Uma demonstração desse fato pode ser vista em Carmo (2014, p.66).

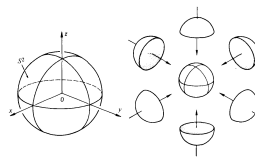


Figura 1: Esfera. Fonte: Carmo (2014).

Note que, conforme a Figura 1, são necessárias 6 parametrizações para que possamos cobrir a esfera, de acordo com as exigências da nossa definição.

Ao decorrer do trabalho, iremos tratar apenas de superfícies regulares. Assim, iremos nos referir a tais superfícies, apenas como S .

Definição 2. O vetor tangente a S em um ponto $p \in S$, é o vetor $\alpha'(0)$, com α uma curva parametrizada, diferenciável, e tal que $\alpha(0) = p$.

Definição 3. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação diferenciável. Associamos a cada $q \in U$ uma aplicação linear $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que é chamada a *diferencial de X em q* , e é definida da seguinte forma. Sejam $w \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ uma curva diferenciável tal que $\alpha'(0) = w$. Pela regra da cadeia, a curva $\beta = X \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ também é diferenciável. Então

$$dX_q(w) = \beta'(0).$$

O próximo resultado, mostra que o conjunto de vetores tangentes a superfície S , são os mesmos vetores que pertencem a dX , determinando um espaço vetorial correspondentes aos vetores tangentes a superfície em um ponto $p \in S$, o qual denotaremos por $T_p S$.

Proposição 4. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de uma superfície S , e considere $q \in U$. O subespaço vetorial $dX_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$ coincide com o conjunto de vetores tangentes a S em $X(q)$.

Prova. Seja w o vetor tangente a S em p , isto é $\alpha'(0) = w$, com $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow X(U)$ e $\alpha(0) = p$. A curva $\beta = X^{-1} \circ \alpha$ é diferenciável, pois α e X^{-1} o são. E por definição $dX_q(\beta'(0)) = w$. Por outro lado, considere $dX_q(v) = w$, e observe que v é o vetor tangente à reta $\gamma(t) = vt + p$, com $v \in \mathbb{R}^2$ e $q \in U$. Por definição de diferencial $w = \alpha'(0)$ com $\alpha = X \circ \gamma$. $\square$

Conforme mostrado na Proposição 4, o plano tangente a superfície S no ponto p é um subespaço vetorial, o qual servirá como espaço base para o produto interno que será definido na próxima seção. Deste modo, a escolha de cada parametrização X define uma base $\{X_u, X_v\}$ de $T_p S$, chamada de base associada a X .

Observação 1. Para determinar as coordenadas de um vetor $w \in T_p S$, tomamos w como vetor velocidade de $\alpha = X \circ \beta$ e $\beta = (u(t), v(t))$, com $\beta(0) = q$ e $X^{-1}(p) = q$. Segue que $\alpha(0) = (x(u(0), v(0)), y(u(0), v(0)), z(u(0), v(0)))$ que implica em

$$\alpha'(0) = X_u u'(0) + X_v v'(0) = w. \quad (1)$$

Assim, na base $\{X_u(q), X_v(q)\}$, w tem coordenadas $(u'(0), v'(0))$, com $(u(t), v(t))$ a expressão, na parametrização X , de um curva que tem w como vetor velocidade em $t = 0$.

Nesta seção, definimos as superfícies regulares (S), as quais nosso foco será dado. Também definimos, o que compreendemos por vetores tangentes a essa superfície, vendo na Proposição 4 que o conjunto de vetores tangentes a S formam a base $T_p S$. Na próxima seção trataremos da questão métrica área dessas superfícies, por meio de uma forma quadrática, tendo como base o plano tangente tratado nesta seção.

3 Primeira Forma Fundamental

Até o momento, demos um tratamento para as superfícies do ponto de vista da diferenciabilidade. Já nessa seção, apresentaremos as estruturas geométricas associadas a uma superfície regular. Deste modo, trataremos as superfícies regulares, por meio das propriedades intrinsecamente associadas a elas, deixando de nos preocuparmos com o espaço ambiente onde estão.

Definição 5. A forma quadrática I_p chamada de *primeira forma fundamental* da superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ em $p \in S$ é definida por

$$I_p : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w \mapsto \langle w, w \rangle_p = |w|^2 \geq 0.$$

O produto interno é o produto natural do $\mathbb{R}^3$ restrito ao plano tangente $T_p S$. Sendo a primeira forma fundamental uma forma bilinear e simétrica, isto é $\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle w_2, w_1 \rangle_p$ e $\langle w_1, w_2 \rangle_p$ é linear em w_1 e w_2 . A primeira forma fundamental é a expressão de como a superfície S herda o produto interno usual do $\mathbb{R}^3$. Assim, a primeira forma fundamental nos permite realizar medidas sobre a superfície sem fazer menção ao espaço ambiente $\mathbb{R}^3$.

Vamos expressar a I_p na base $\{X_u, X_v\}$ associada a $X(u, v)$ em p . O vetor $w \in T_p S$ é o vetor velocidade $\alpha'(0)$ de uma curva parametrizada por $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ e $p = \alpha(0) = X(u(0), v(0))$. Segue da Observação 1 que

$$I_p(\alpha'(0)) = \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p = \langle X_u u'(0) + X_v v'(0), X_u u'(0) + X_v v'(0) \rangle_p$$

$$= u'(0)^2 |X_u|^2 + 2u'(0)v'(0) \langle X_u, X_v \rangle + v'(0)^2 |X_v|^2.$$

Os coeficientes da I_p na base $\{X_u, X_v\}$ de $T_p S$ em p são dados por

$$E(u_0, v_0) = |X_u|^2, \quad F(u_0, v_0) = \langle X_u, X_v \rangle \quad \text{e} \quad G(u_0, v_0) = |X_v|^2. \quad (2)$$

Fazendo p variar na vizinhança de $X(u_0, v_0)$ obtemos $E(u, v)$, $F(u, v)$ e $G(u, v)$ funções diferenciáveis.

Utilizando a primeira forma fundamental da Definição 5, podemos obter o comprimento de arco de uma curva parametrizada $\alpha : [0, b] \rightarrow S$ que é dado por $s(t) = \int_0^b |\alpha'(t)| dt$. Supondo que $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, segue de (2), que o comprimento de arco pode ser escrito como $s(t) = \int_0^b \sqrt{|\alpha'(t)|^2} dt = \int_0^b \sqrt{I(\alpha'(t))} dt = \int_0^b \sqrt{E(u')^2 + 2F(u')(v') + G(v')^2} dt$ que é a expressão do comprimento de arco segundo a primeira forma fundamental.

Outra importante questão métrica que podemos tratar com a primeira forma fundamental é a área. Para isso precisamos de alguns resultados de orientabilidade, e alguns conceitos os quais iremos definir.

A escolha de uma orientação de $T_p S$ induz uma orientação em uma vizinhança coordenada de p , que intuitivamente é a noção de movimento positivo ao longo de curvas fechadas suficientemente pequenas em torno de cada ponto.

Definição 6. Dadas as bases $\{X_u, X_v\}$ e $\{\bar{X}_{\bar{u}}, \bar{X}_{\bar{v}}\}$, dizemos que elas determinam a *mesma orientação* de $T_p S$ se o jacobiano $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}$ da mudança de coordenadas é positivo. Uma superfície regular S é orientável se for possível escolher uma família de vizinhanças coordenadas, tal que se $p \in S$, pertence a duas vizinhanças coordenadas, então elas determinam a mesma orientação. A escolha de uma tal família é chamada orientação de S .

A proposição a seguir relaciona o conceito de superfícies orientáveis e a existência de um campo de vetores normais.

Proposição 7. Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é orientável se e somente se existe um campo diferenciável $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ de vetores normais em S .

Prova. Uma demonstração pode ser vista em Carmo (2014, p.124). □

Temos, portanto, que a orientabilidade de uma superfície regular é dada pela existência de um campo de vetores unitários contínuos em S .

Tratado da orientabilidade, resta definir alguns elementos para que possamos tratar da métrica área segundo a primeira forma fundamental.

Domínio (regular) de S é um subconjunto aberto e conexo de S , cuja *fronteira* é a imagem de um círculo por um homeomorfismo diferenciável que é regular exceto em um número finito de pontos. Uma *região* de S é a união de um domínio com a sua fronteira. Uma região de $S \subset \mathbb{R}^3$ é *limitada* se está contida em alguma bola de $\mathbb{R}^3$.

Agora, podemos tratar da área de uma superfície regular. Deste modo, o teorema a seguir fornece uma forma de calcular a área de uma superfície regular.

Teorema 8. Seja $X : U \rightarrow S$ um sistema de coordenadas em uma superfície regular S e seja $R = X(Q)$ uma região limitada de S contida em $X(U)$. Então R tem uma área dada por

$$A(R) = \iint_Q |X_u \wedge X_v| \, du dv. \quad (3)$$

Prova. Considere uma partição, $R = \bigcup_i R_i$ como R é limitada e fechada (região), podemos supor que a partição seja suficientemente refinada, e como as normais variam continuamente, para cada dois pontos na partição, as suas normais não são ortogonais.

Tome uma partição R tal que $\forall p, q \in R$ a norma $\mu = d(p, q) < \delta$ seja o número de Lebesgue, logo $p, q \in V_p$ garantindo que as normais não sejam ortogonais. Fixe uma região R_i da partição e escolha $p_i \in R_i = X(Q_i)$. Considere um novo sistema de eixos $p_i \bar{x} \bar{y} \bar{z} \in \mathbb{R}^3$ sendo obtido esse novo eixo por uma translação Op_i , seguido de uma rotação em Oz na normal a superfície em p_i , preservando a orientação do sistema anterior.

A parametrização obtida fica $\bar{X}(u, v) = (\bar{x}(u, v), \bar{y}(u, v), \bar{z}(u, v))$. Observamos que $\bar{X}$ é obtida de X por uma transformação linear ortogonal, preservando a norma.

Mostremos que $\frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(x, y)} \neq 0$ em Q_i . Suponhamos que $\frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(x, y)} = 0$, e como $\bar{z}_x = \bar{z}_y = 0$ (estão no plano $\bar{x}\bar{y}$), segue que $\bar{X}_x \wedge \bar{X}_y(Q_i) = \vec{0}$, assim haveriam duas normais ortogonais, contrariando que não existe duas normais ortogonais em R_i . Logo $\frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(x, y)} \neq 0$ em Q_i .

Assim, a expressão $A(\bar{R}_i) = \iint_{\bar{R}_i} d\bar{x}d\bar{y}$. E como $\frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(x, y)} \neq 0$ em Q_i , podemos tomar a mudança de coordenadas $\bar{x} = \bar{x}(u, v)$, $\bar{y} = \bar{y}(u, v)$. Segue que $A(\bar{R}_i) = \iint_Q \left| \frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(u, v)} \right| dudv$.

Em p_i os vetores $\bar{X}_u$ e $\bar{X}_v$ pertencem ao plano $\bar{x}\bar{y}$ portanto $\frac{\partial \bar{z}}{\partial u} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial v} = 0$ em p_i . Logo $\left| \frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(u, v)} \right| = \left| \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \right|$ em p_i . Segue que $\left| \frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(u, v)} \right| - \left| \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \right| = \epsilon_i(u, v)$ tal que $(u, v) \in Q_i$ com $\epsilon_i(u, v)$ uma função contínua em Q_i com $\epsilon_i(X^{-1}(p_i)) = 0$. Como o comprimento de um vetor é preservado por translação e transformações lineares ortogonais, obtemos

$$\left| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right| = \left| \frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(u, v)} \right| - \epsilon_i(u, v).$$

Sejam M_i e m_i o máximo e o mínimo de $\epsilon_i(u, v)$ na região compacta Q_i , então

$$\begin{aligned} m_i &\leq \left| \frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(u, v)} \right| - \left| \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \right| \leq M_i \implies \\ m_i \iint_{Q_i} dudv &\leq \iint_{Q_i} \left| \frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(u, v)} \right| - \left| \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \right| dudv \leq M_i \iint_{Q_i} dudv \implies \\ m_i \iint_{Q_i} dudv &\leq A(\bar{R}_i) - \iint_{Q_i} \left| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right| dudv \leq M_i \iint_{Q_i} dudv. \end{aligned}$$

Procedendo da mesma maneira para todos os R_i , obtemos

$$\sum_i m_i A(Q_i) \leq \sum_i A(\bar{R}_i) - \iint_Q \left| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right| dudv \leq \sum_i M_i A(Q_i).$$

Refinemos a partição de modo que a norma $\mu \rightarrow 0$, então $M_i \rightarrow m_i$. Note que $\sum_i m_i$ e $\sum_i M_i$ convergem, pois a função ϵ_i é contínua dentro de um compacto, assumindo seus máximos e mínimos, ainda $A(Q_i) \rightarrow 0$ quando $\mu \rightarrow 0$. Então existe o $\lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_i A(\bar{R}_i)$, e

$$\sum_i A(\bar{R}_i) - \iint_Q \left| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right| dudv = 0.$$

Portanto $\sum_i A(\bar{R}_i) = \iint_Q \left| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right| dudv$. □

Finalmente, podemos calcular a área de uma superfície regular, bastando conhecer os coeficientes da primeira forma fundamental. De fato,

$$|X_u \wedge X_v|^2 + \langle X_u, X_v \rangle^2 = |X_u|^2 |X_v|^2 \implies \quad (4)$$

$$|X_u \wedge X_v| = \sqrt{|X_u|^2 |X_v|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2}, \quad (5)$$

utilizando (3) e (5) em (2), concluímos que a área da superfície é dada por

$$A(R) = \iint_Q \sqrt{EG - F^2} dudv. \quad (6)$$

Podemos relacionar a primeira forma fundamental com o gráfico de uma função diferenciável. Visto que o resultado a seguir, mostra que o teorema anterior generaliza o conceito de área da região superfície gráfico de função.

Proposição 9. A área de uma região limitada R da superfície $z = f(x, y)$ é

$$A = \iint_Q \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy \quad (7)$$

com Q sendo a projeção ortogonal de R sobre o plano xy .

Prova. Considere a superfície regular parametrizada por $X(x, y) = (x, y, f(x, y))$, calculando a primeira forma fundamental de X , $X_x = (1, 0, f_x)$, $X_y = (0, 1, f_y)$, obtemos $E = f_x^2 + 1$, $F = f_x f_y$ e $G = f_y^2 + 1$. Assim, de (6), $A = \int_Q \sqrt{EG - F^2} du dv = \iint_Q \sqrt{(f_x^2 + 1)(f_y^2 + 1) - (f_x f_y)^2} dx dy = \iint_Q \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$. $\square$

Logo podemos utilizar (7) para calcular a área de uma superfície que é gráfico de função, a qual é uma superfície regular.

Obtemos nesta secção os coeficientes da primeira forma fundamental E , G e F definidos em (2), também, conseguimos uma forma de calcular a área de uma superfície regular, a qual generaliza o conceito de área de superfície gráfico de função. Na próxima secção definiremos a aplicação de Gauss, que juntamente com a primeira forma fundamental poderemos definir a curvatura gaussiana e média.

4 A Geometria da aplicação de Gauss

A seguir mediremos o quão rapidamente uma superfície S se afasta do plano tangente $T_p S$ em uma vizinha de $p \in S$. O que é equivalente a medir a taxa de variação em p de um campo vetorial normal unitário em uma vizinhança de p .

Para curvas parametrizadas, a curvatura é a taxa de variação do vetor tangente. Para superfícies iremos definir curvatura, como a taxa de variação do plano tangente em uma vizinhança do ponto. Além disso, ao final desta seção mostraremos que a curvatura média, H , pode ser expressa pelas I e II formas fundamentais.

Definição 10. A aplicação normal de Gauss é definida por $N : S \rightarrow S^2$, com S^2 é a esfera unitária, e $N(p) = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}$, com $\langle N, N \rangle = 1$ e $N(p) \perp T_p S$.

A aplicação definida anteriormente, leva vetores da superfície S em vetores na esfera unitária, de modo com que esses vetores sejam ortogonais ao plano tangente.

Definição 11. O operador linear definido por $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S^2$ é denominado *diferencial da aplicação normal de Gauss*.

Tendo bem estabelecido a dN_p , podemos tratar da segunda forma fundamental da superfície S .

Definição 12. A segunda forma quadrática, é definida no $T_p S$ por $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$, denominada de *segunda forma fundamental* de S em p .

Definição 13. Seja C uma curva regular em S passando por $p \in S$, seja k a curvatura de C em p e $\cos \theta = \langle N, n \rangle$ com n sendo o vetor normal a curva C e N o vetor normal a superfície no ponto p . O número $K_n = k \cos \theta$ é denominado de *curvatura normal* em p de $C \subset S$.

Consideremos a curva C em S , sendo parametrizada por $\alpha(s)$, com s sendo o comprimento de arco de C de acordo com a Definição 7, com $\alpha(0) = p$. Indiquemos $N(s)$ a restrição da normal à curva $\alpha(s)$, então $\langle N(s), \alpha'(s) \rangle = 0$, segue que $\langle dN(s), \alpha'(s) \rangle = -\langle N(s), \alpha''(s) \rangle$. Logo $II_p(\alpha'(0)) = -\langle dN(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle = \langle N(0), \alpha''(0) \rangle = \langle N, Kn \rangle = K_n$.

Portanto a segunda forma fundamental nada mais é do que a curvatura normal de Gauss. Para que possamos definir a curvatura média, é necessário definir as curvaturas principais, as quais ocorrem em direções ortogonais na superfície S .

Definição 14. O máximo da curvatura normal, k_1 , e o mínimo da curvatura normal, k_2 , são denominadas de *curvaturas principais* em p , e as direções e_1, e_2 são direções principais em p .

O operador linear dN definido em (11), é auto-adjunto, de modo que k_1 e k_2 são autovalores da dN , decorrendo daí que a matriz da representação da dN é diagonalizável, e assim, podendo ser escrita como

$$dN_p = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{pmatrix},$$

com o determinante da diferencial sendo $(-k_1)(-k_2)$, e o traço da diferencial $-(k_1 + k_2)$.

Definição 15. O determinante da dN_p é denominado de *curvatura gaussiana* K de S em p . E o negativo da metade traço de dN_p é denominado *curvatura média* H de S em p .

$$\begin{aligned} K &= k_1 k_2. \\ H &= \frac{k_1 + k_2}{2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Até este momento, tratamos da segunda forma fundamental sem nos preocuparmos com sua expressão em uma base. Agora, expressaremos os elementos da segunda forma fundamental, e das curvaturas gaussiana e média em suas coordenadas locais.

Consideremos uma parametrização $X(u, v)$ de uma superfície regular S e com $p \in S$. E seja $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ com $\alpha(0) = p$, uma curva parametrizada em S .

O vetor tangente a curva α em p definido em (1) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= X_u u'(t) + X_v v'(t) \quad e \\ dN(\alpha'(t)) &= N'(u(t), v(t)) = N_u u'(t) + N_v v'(t). \end{aligned}$$

Notemos que N_u e $N_v \in T_p S$, segue que podemos escrevê-los como combinação linear da base $\{X_u, X_v\}$ do $T_p S$, ou seja

$$N_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v.$$

$$N_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v.$$

Portanto $dN(\alpha'(t)) = (a_{11}X_u + a_{21}X_v)u'(t) + (a_{12}X_u + a_{22}X_v)v'(t)$. Ou ainda,

$$dN(\alpha'(t)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}.$$

Logo na base $\{X_u, X_v\}$, a matriz da representação da dN é a matriz (a_{ij}) $i, j = 1, 2$. Por outro lado

$$\begin{aligned} II_p(\alpha') &= -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle = -\langle N_u u' + N_v v', X_u u' + X_v v' \rangle \\ &= -(u')^2 \langle N_u, X_u \rangle - 2u'v' \langle N_u, X_v \rangle - (v')^2 \langle N_v, X_u \rangle. \end{aligned} \quad (9)$$

Como $\langle N, X_u \rangle = \langle N, X_v \rangle = 0$, pois são vetores ortogonais. Segue de (9) que $\langle N_v, X_u \rangle = -\langle N, X_{uv} \rangle$ e $\langle N_u, X_v \rangle = -\langle N, X_{vu} \rangle$, como $X_{uv} = X_{vu}$, concluímos que $\langle N_u, X_v \rangle = \langle N_v, X_u \rangle$.

Portanto a *segunda forma fundamental* é expressa por

$$II_p(\alpha') = (u')^2 e + 2u'v' f + (v')^2 g,$$

com os coeficientes da segunda forma fundamental expressos como

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u, X_u \rangle \implies -e = \langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_u \rangle. \\ f &= -\langle N_v, X_u \rangle \implies -f = \langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_v \rangle. \\ f &= -\langle N_u, X_v \rangle \implies -f = \langle a_{12}X_u + a_{22}X_v, X_u \rangle. \\ g &= -\langle N_v, X_v \rangle \implies -g = \langle a_{12}X_u + a_{22}X_v, X_v \rangle. \end{aligned}$$

Deste modo, podemos escrever a seguinte equação

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

$\implies$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1},$$

com

$$I^{-1} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

Segue que

$$a_{11} = \frac{Ff - EG}{EG - F^2}, a_{21} = \frac{eF + fE}{EG - F^2}, a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2}, a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \quad (10)$$

A matriz I citada anteriormente, é invertível, pois se o $\det(I) = EG - F^2 = 0$, então $|X_u|^2 |X_v|^2 = \langle X_u, X_v \rangle^2$, segue que $\frac{\langle X_u, X_v \rangle}{|X_u||X_v|} = 1$, por outro lado, $\cos \varphi = \frac{\langle X_u, X_v \rangle}{|X_u||X_v|}$. Resultando

em $\varphi = 0$, o que é um absurdo, pois os vetores $\{X_u, X_v\}$ geram o plano tangente $T_p S$. Logo o $\det(I) \neq 0$ e portanto inversível.

Tendo bem definida os elementos da matriz (a_{ij}) por meio dos coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais, escreveremos a curvatura média, (H) , utilizando estes coeficientes.

Lembremos que $-k_1, -k_2$, são os autovalores de dN . Assim, para algum $v \in T_p S$ não nulo

$$\begin{aligned} dN(v) = -kv = -kI(v) &\implies (dN + kI)v = 0 \implies \\ dN + kI = 0 &\implies \det(dN + kI) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Assim a equação (11) tem mais que uma solução.

$$\det(dN + kI) = \det \begin{pmatrix} a_{11} + k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + k \end{pmatrix} = 0.$$

ou

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + k(a_{11} + a_{22}) + k^2 = 0. \quad (12)$$

Como k_1 e k_2 são raízes de (12), segue que

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + k(a_{11} + a_{22}) + k^2 &= (k - k_1)(k - k_2) \implies \\ -k_1 - k_2 &= a_{11} + a_{22}. \end{aligned} \quad (13)$$

Utilizando (10) em (13) temos que

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) = -\frac{1}{2} \frac{-eG + fF + fF - gE}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{Ge - 2Ff + Eg}{EG - F^2}.$$

Portanto

$$H = \frac{1}{2} \frac{Ge - 2Ff + Eg}{EG - F^2}. \quad (14)$$

Finalmente, basta conhecer as coordenadas da primeira e segunda formas fundamentais, para que possamos calcular a curvatura média.

Na próxima seção, definiremos superfícies mínimas, introduzindo a variação normal de uma parametrização X , mostrando que esta superfície definida pela variação, é uma superfície mínima em uma vizinhança do ponto. Também definiremos a derivada da função área da normal de X^t , podendo assim, demonstrar o teorema que relaciona superfícies mínimas com superfícies que minimizam área.

5 Superfície mínimas

Nosso objetivo agora é mostrar a relação entre superfícies mínimas e superfícies de áreas mínimas. Tendo bem definida a curvatura média em (8), e conhecendo sua expressão por meio da primeira e segunda formas fundamentais, ver (14), podemos tratar das superfícies mínimas, que estão diretamente relacionadas com $H = 0$ como descrito na definição a seguir.

Definição 16. Uma *superfície parametrizada regular* é *mínima* se $H = 0$ para todo $p \in S$ e toda parametrização X de S .

Deste modo, toda superfície mínima tem curvatura média identicamente nula, ou seja, de (8), temos que $k_1 = -k_2$ ou $k_1 = k_2 = 0$.

Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Escolha um domínio $D \subset U$ limitado e uma função diferenciável $h : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$, com $\overline{D}$ o fecho. Assim, a *variação normal* de X determinada por h , é a aplicação dada por $\varphi : \overline{D} \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ agindo da seguinte forma $\varphi(u, v, t) = X(u, v) + th(u, v)N(u, v)$.

Para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ fixado, a aplicação $X^t : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ com $X^t(u, v) = \varphi(u, v, t)$, temos uma superfície parametrizada com $\frac{\partial X^t}{\partial u} = X_u + thh_uN + thN_u$ e $\frac{\partial X^t}{\partial v} = X_v + thh_vN + thN_v$.

Assim denotamos os coeficientes da primeira forma fundamental de X^t por

$$\begin{aligned} E^t &= E + 2th\langle X_u, N_u \rangle + t^2h^2\langle N_u, N_u \rangle + t^2h_u^2. \\ F^t &= F + th(\langle X_u, N_v \rangle + \langle X_v, N_u \rangle) + t^2h^2\langle N_u, N_v \rangle + t^2h_vh_u. \\ G^t &= G + 2th\langle X_v, N_v \rangle + t^2h^2\langle N_v, N_v \rangle + t^2h_v^2. \end{aligned}$$

Utilizando que $\langle X_u, N_u \rangle = -e$, $\langle X_u, N_v \rangle + \langle X_v, N_u \rangle = -2f$ e $\langle X_v, N_v \rangle = -g$ e a equação (14) em que $H = \frac{1}{2} \frac{Eg - 2fF + Ge}{EG - F^2}$, obtemos

$$E^tG^t - (F^t)^2 = EG - F^2 - 2th(Eg - 2Ff + Ge) + R = (EG - F^2)(1 - 4thH) + R,$$

com $R = t^2(Eh^2|N_v|^2 + E(h_v)^2 + 4h^2 + ge - 2tge - 2th^3e|N_v|^2 - 2t^2h(h_v)^2e + h^2|N_u|^2G - 2th^3|N_u|^2g + th^3|N_u|^2 + t^3h^2|N_u|^2 + G(h_u)^2 - 2t(h_u)^2h + t^3(h_u)^2hv - 2Fh^2\langle N_u, N_v \rangle + 4th^3f\langle N_u, N_v \rangle - t^2h^4\langle N_u, N_v \rangle^2 - 4th^2f^2 - 2Fthv^2 + 4th(h_v)^2f - 2t^2h^2(h_v)^2\langle N_u, N_v \rangle + t^2(h_v)^4)$.

Observemos que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R}{t} = 0$. Segue que, se ϵ é suficientemente pequeno, X^t é uma superfície parametrizada regular. Além disso, utilizando (6) a área de $X^t(\overline{D})$ é dada por

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_{\overline{D}} \sqrt{E^tG^t - (F^t)^2} dudv \\ &= \int_{\overline{D}} \sqrt{(EG - F^2)(1 - 4thH) + R} dudv \\ &= \int_{\overline{D}} \sqrt{(EG - F^2)} \sqrt{1 - 4thH + \overline{R}} dudv, \end{aligned}$$

com $\overline{R} = \frac{R}{EG - F^2}$.

Assim, se ϵ é suficientemente pequeno, A é uma função diferenciável e sua derivada em $t = 0$ é dada por

$$A'(0) = -2 \int_{\overline{D}} Hh \sqrt{EG - F^2} dudv. \quad (15)$$

Obtemos a expressão da função variação normal da área, para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, e sua derivada em $t = 0$, na qual $X^0 = X$, assim, podemos estabelecer a ligação entre as superfícies mínimas no sentido da nossa definição, e superfícies de área mínima, elucidada pelo próximo resultado.

Teorema 17. *Seja X uma superfície parametrizada regular e seja $D \subset U$ um domínio limitado em U . Então X é uma superfície mínima se, e somente se $A'(0) = 0$, $\forall D$ e toda variação normal de $X(\overline{D})$.*

Prova. Se X é uma superfície mínima, então pela Definição 16, $H = 0$ para todos os pontos da parametrização X , segue de (15), que $A'(0) = 0$. Por outro lado, suponha que $H(q) \neq 0$ e que $A'(0) = 0 \forall D$ e toda variação normal de $X(\overline{D})$. Como a equação (15) permite a escolha de qualquer aplicação h diferenciável, tomemos $h : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(q) = H(q)$, $hH > 0$ e $h = 0$ fora de uma vizinhança de q , então $A'(0) < 0$ para a variação determinada por h , o que é um absurdo. $\square$

Mostramos no Teorema 17 que toda superfície mínima, tem a região limitada $X(\overline{D})$ como um ponto crítico para a função área, visto que $A'(0) = 0$ para qualquer variação normal de $X(\overline{D})$.

Pela Definição (16), se existe uma superfície S mínima que tenha uma curva C como fronteira, então a curvatura média é identicamente nula em S . Logo pelo Teorema 17, as superfícies de área mínima, que são as de menor área sujeita a uma curva C de fronteira, são superfícies mínimas, ou seja possuem $H = 0$. Podemos pensar se a recíproca é verdadeira, isto é, se $H = 0$ em S , essa superfície tem área mínima? Não, é falsa a recíproca. Como tratado no parágrafo anterior, superfícies que tem $H = 0$, são pontos críticos da função área, para qualquer variação normal da superfície. Apesar disso, não podemos garantir sem maiores restrições, que este ponto seja sequer um ponto de mínimo relativo para qualquer variação normal, e muito menos um mínimo absoluto, o qual pode não existir.

Algumas considerações

Este trabalho é parte de uma iniciação científica sobre superfícies mínimas, o qual expomos a relação entre estas superfícies e a função área obtida pela variação normal da superfície. Concluindo que independente da parametrização e a variação normal tomada, se S é uma superfície mínima, teremos $A'(0) = 0$, assim, os pontos dessa superfície serão pontos críticos, e ainda, esta superfície terá a menor área com a fronteira C pré determinada.

Referência

CARMO, Mandredo Perdigão Do. Geometria diferencial de curvas e superfícies. 6 ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2014. 608 p.

Análise da influência da variável precipitação na produtividade da cultura da soja no estado do Paraná no ano-safra 2011/2012

Edilza Martins da Silva¹
Unioeste
edilza_martins@hotmail.com

Luciana Pagliosa Carvalho Guedes
Unioeste
luciana.guedes@unioeste.br

Priscila Pigatto Gasparin
Unioeste
matematicapri@gmail.com

Jerry Adriani Johann
Unioeste
jerry.johann@hotmail.com

Resumo: A produtividade da cultura da soja é influenciada por diversos fatores, principalmente pelas variáveis agrometeorológicas, como a precipitação que intervém em todo o estágio fenológico da planta. O objetivo desse trabalho foi analisar e verificar se a concentração ou a uniformidade da variável precipitação, no momento do pico vegetativo da soja e em intervalos próximos, tem relação com a produtividade da soja no estado do Paraná no ano-safra 2011/12. Para isso utilizou-se medidas da estatística circular como o vetor médio, que indica o momento da ocorrência de maior volume da precipitação e o comprimento do vetor médio que mostra a uniformidade ou a concentração do volume da chuva para os intervalos considerados. Com o estudo realizado, observou-se que nas regiões com maiores valores de produtividade, ocorreram também um maior volume total de chuva no pico vegetativo da cultura e nas variações de intervalos considerados, em que nestes ocorreram uma distribuição de maneira moderada e concentrada do volume da chuva. Já nas regiões com menor produtividade ocorreram um menor volume da chuva, sendo este distribuído de maneira mais uniforme.

Palavras-chave: análise temporal, pico vegetativo, sazonalidade.

1 Introdução

No Paraná a produção da cultura da soja (*Glycine max* (L.) Merrill) se tornou importante na agricultura, como lavoura comercial, em meados da década de 50 (EMBRAPA SOJA, 2002). Tendo na safra de 2016/2017 a segunda maior produção do país, sendo cerca de 20% superior a safra anterior de 2015/2016, que foi afetada pelo excesso de chuva, que ocasionou a redução na produtividade (SEAB, 2017).

¹PGEAGRI/Unioeste

De acordo com Klosowki (1997) os elementos agrometeorológicos afetam o crescimento e o desenvolvimento da cultura da soja. Entre esses elementos está a disponibilidade hídrica, que afetam diretamente a planta nos períodos germinação-emergência e floração-enchimento de grãos.

De acordo com Embrapa (2002) o consumo mais elevado de água coincide com o período em que a cultura apresenta maior altura e índice de área foliar, sendo um total de água por ciclo da cultura de 450 a 800 mm. Mas esse valor do consumo de água depende do clima, do manejo da cultura e da duração do seu ciclo. Para um bom desempenho, além de um volume de água adequado, deve ocorrer uma boa distribuição de chuvas ao longo do ciclo (EMBRAPA 2007). Sendo a disponibilidade hídrica uma das principais causas da variabilidade da produtividade de um ano para o outro ou de uma região para outra (EMBRAPA SOJA, 1999).

O objetivo desse trabalho foi analisar a variável precipitação, no momento do pico vegetativo da soja e utilizando metodologias da Estatística Circular verificar se ocorreu concentração ou uniformidade da variável precipitação em intervalos próximos do momento do pico vegetativo, se essa tem relação com a produtividade da soja no estado do Paraná no ano-safra 2011/12.

2 Material e Métodos

A área de estudo compreende os 399 municípios do estado do Paraná localizado no sul do Brasil, para o ano-safra 2011/2012. A escolha do ano-safra, foi a partir de uma análise da precipitação numa série histórica dos anos-safras compreendidos entre 2000/2001 a 2016/2017, para a qual escolheu-se o ano-safra com a menor ocorrência de precipitação na série estudada.

As variáveis estudadas foram produtividade da soja ($t\ ha^{-1}$) e precipitação pluvial (mm) dos decêndios do ciclo vegetativo da cultura da soja para o momento do pico vegetativo e para os seguintes dois intervalos: um decêndio antes e um depois do pico (intervalo 1) e dois decêndios antes e depois do pico (intervalo 2). Sendo que a precipitação pluvial foi obtida por meio do modelo (ECMWF) European Centre for Medium-Range Weather Forecasts, cujos dados são disponibilizados gratuitamente no website do JRC (ECMWF, 2018) e estão no formato shape, tendo uma resolução de *pixels* com uma área aproximada de $25 \times 25 km$ e uma resolução temporal decenal (cada 10 dias).

A produtividade da soja foi obtida para cada município do estado por meio de informações proveniente do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE, 2012). Para a obtenção do valor da produtividade da soja nas mesmas localizações (*pixels*) que foram obtidos os valores da precipitação pluvial, foram calculado para cada *pixel* pela seguinte Equação 1:

$$MP = \frac{\sum_{i=1}^n a_i p_i}{\sum_{i=1}^n a_i} \quad (1)$$

em que MP é a média ponderada da produtividade, a_i a área do município dentro do *pixel*, p_i

a quantidade da produtividade do respectivo município, com $i = 1, \dots, n$, sendo n o número de *pixel* e não foram considerados para o cálculo municípios sem produtividade ($p_i = 0$).

Para a variável precipitação acumuladas nos dois intervalos, calcularam-se a seguinte medida da estatística circular para as 333 *pixels* do modelo ECMWF: a média circular ($\bar{\theta}$) (Equação 2) (JAMMALAMADAKA e SENGUPTA, 2001), que determina o decêndio médio da ocorrência de maior precipitação.

$$\bar{\theta} = \begin{cases} \arctan \frac{\bar{y}}{\bar{x}} & \text{se } \bar{x} > 0, \quad \bar{y} \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } \bar{x} = 0, \quad \bar{y} > 0 \\ \left(\arctan \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \right) + \pi & \text{se } \bar{x} < 0 \\ \left(\arctan \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \right) + 2\pi & \text{se } \bar{x} \geq 0, \quad \bar{y} < 0 \\ \text{Indefinido} & \text{se } \bar{x} = 0, \quad \bar{y} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

em que a função inversa da tangente ($\arctan$) é definida no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, e tem-se que $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i \cos \theta_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i \sin \theta_i$ que correspondem a média aritmética das coordenadas cartesianas, sendo f_i com $i = 1, \dots, n$ a frequência angular observada, n o tamanho da amostra dos dados circular e θ_i é o ângulo correspondente ao dado circular, com $i = 1, \dots, n$.

Já a outra medida da estatística circular utilizada, foi o comprimento do vetor médio circular (R) (Equação 3) (BESKOW et al., 2014), tendo o seu valor variando de 0 (quando indica uma distribuição mais uniforme dos dados em um intervalo considerado) a 1 (quando indica menos uniformidade dos dados no intervalo considerado).

$$R = \frac{1}{n} \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n \cos \theta_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n \sin \theta_i \right)^2} \quad (3)$$

Também para a precipitação acumulada dos dois intervalos considerados realizou-se representação gráfica de algumas estações por meio do histograma circular.

Realizou-se também a distribuição espacial para a produtividade da soja, a precipitação e seu decêndio correspondente no momento no seu pico vegetativo, a precipitação acumulada, o vetor médio e o comprimento do vetor médio para o intervalo 1 e o intervalo 2 no estado Paraná do ano-safra 2011/2012. Verificando ocorrências das variáveis em estudos nas mesorregiões do estado.

Para desenvolver a análise da estatística circular, utilizou-se o pacote circular do *software* R, e para o processamento do mapeamento das variáveis na área de estudo se fez uso do *software* Arcmap 10.0.

3 Resultados e Discussão

A Figura 1a apresenta a distribuição espacial da produtividade da soja no estado do Paraná no ano safra 2011/2012. Neste mapa observa-se um valor expressivo de produtividade na maior parte das seguintes mesorregiões: Centro Oriental, Centro Sul, Sudeste e Oeste da região Metropolitana de Curitiba.

Os menores valores da produtividade estão localizados em grande parte das mesorregiões Noroeste e Oeste. Essa tendência da distribuição da espacial de valores com menores produtividade da soja, foi observada também pela EMBRAPA (2016), que considerou em sua análise a média da produtividade de 14 safras (1999/2000 a 2012/2013) no estado do Paraná.

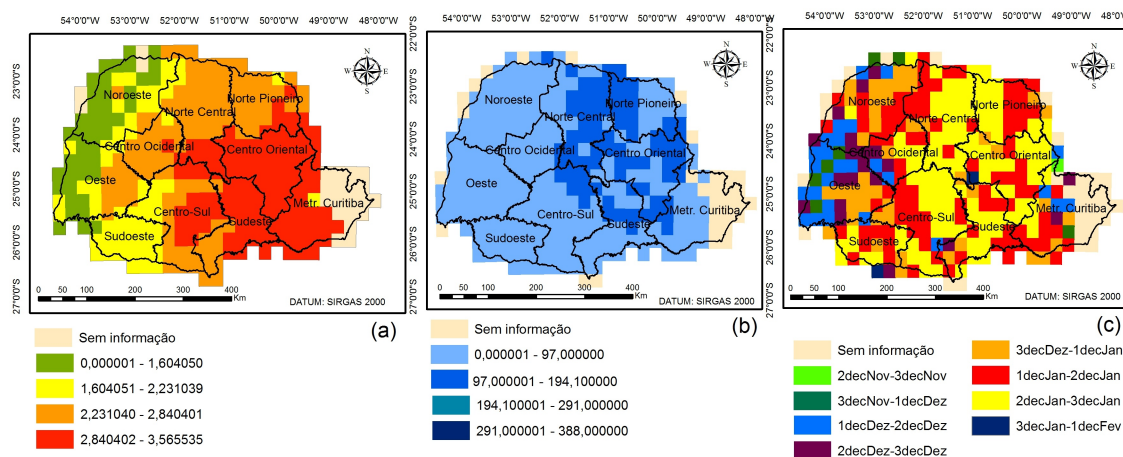


Figura 1: Mapa de:(a) produtividade da cultura da soja do ano-safra 2011/12 no estado do Paraná (b) quantidade de chuva no pico vegetativo c) momento do decêndio da ocorrência do pico vegetativo.

Em relação a distribuição espacial da quantidade total de precipitação ocorrida no decêndio do pico vegetativo da cultura da soja (Figura 1b), observou-se que a maior quantidade total de chuva ocorreu em várias localidades das mesorregiões com maiores valores de produtividade (Figura 1a). Já nas regiões com menores valores de produtividade da soja (Figura 1a), ocorreu também os menores valores de volume de chuva no momento do pico vegetativo. Destaca-se que na maioria das mesorregiões do estado, o pico vegetativo ocorreu no 1º, 2º e 3º decêndios de Janeiro (Figura 1c).

Além disso, foi analisado o volume da precipitação acumulada no intervalo de variação decencial a partir de um decêndio antes até um decêndio depois do pico vegetativo (Figura 2a) e no intervalo de variação decencial a partir de dois decêndios antes até dois decêndios depois do pico vegetativo (Figura 2c). Observou-se que as mesorregiões com grandes valor de precipitação (Figura 2a), são também as mesorregiões que ocorreram os maiores valores de produtividade do estado. Já para as regiões com menores valores de produtividade (Figura 1a), ocorreram também menores valores do volume de precipitação no intervalo 1 e no intervalo 2 (Figura 2a) e (Figura 2c) respectivamente.

Para o intervalo de variação decencial a partir de um decêndio antes até um decêndio depois do pico vegetativo, observa-se que na região (Figura 2b) Oeste do Norte Central, o momento médio da concentração do volume de chuva ocorre entre o 3º decêndio de dezembro à 1º decêndio de Janeiro, sendo este um decêndio anterior ao pico vegetativo. E ainda em algumas regiões do Centro Oriental e em regiões do Leste do Norte Pioneiro o decêndio que ocorreu a concentração do maior volume de chuva é entre o 1º e o 2º decêndio de janeiro, sendo esse exatamente o decêndio do pico vegetativo da região.

Já para a variação decencial a partir de dois decêndios antes até dois decêndios depois do pico vegetativo (Figura 2d), as regiões com valores expressivos de produtividades (Figura 1a), tiveram o momento médio do decêndio com maior ocorrência da precipitação acontecendo no 1º, 2º e 3º decêndio de Janeiro.

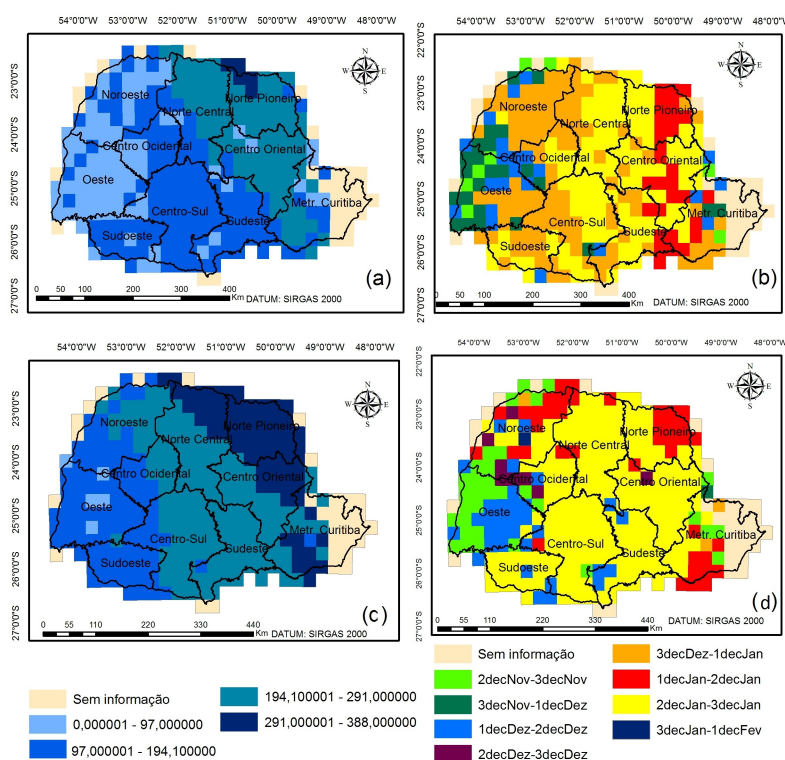


Figura 2: Mapa do: (a) volume de precipitação acumulada (b) decêndio médio da ocorrência de maior volume de precipitação, considerando em (a) e (b) um intervalo de variação decencial a partir de um decêndio antes até um decêndio depois do pico vegetativo; (c) volume de precipitação acumulada e (d) decêndio médio da ocorrência de maior volume de precipitação, considerando em (c) e (d) um intervalo de variação decencial a partir de dois decêndios antes até dois decêndios depois do pico vegetativo

Em relação a distribuição da precipitação ao longo do intervalo de variação decencial, a partir de um decêndio antes até um decêndio depois do pico vegetativo (Figura 3), tem-se que em algumas mesorregiões do estado com alta produtividade, como o Norte Central, Norte Pioneiro, parte do Centro Oriental, Centro Sul, Sudeste, apresentam valores moderados para

a medida do comprimento do vetor médio (Figura 3) indicando assim, uma moderada uniformidade na distribuição da chuva no intervalo considerado, observado no gráfico do histograma circular (Figura 3), de uma estação localizada na mesorregião do Norte Pioneiro. Já na região Metropolitana de Curitiba apresentou valores baixos para o comprimento do vetor médio, indicando uma distribuição uniforme do volume de chuva no intervalo considerado em uma de suas estações.

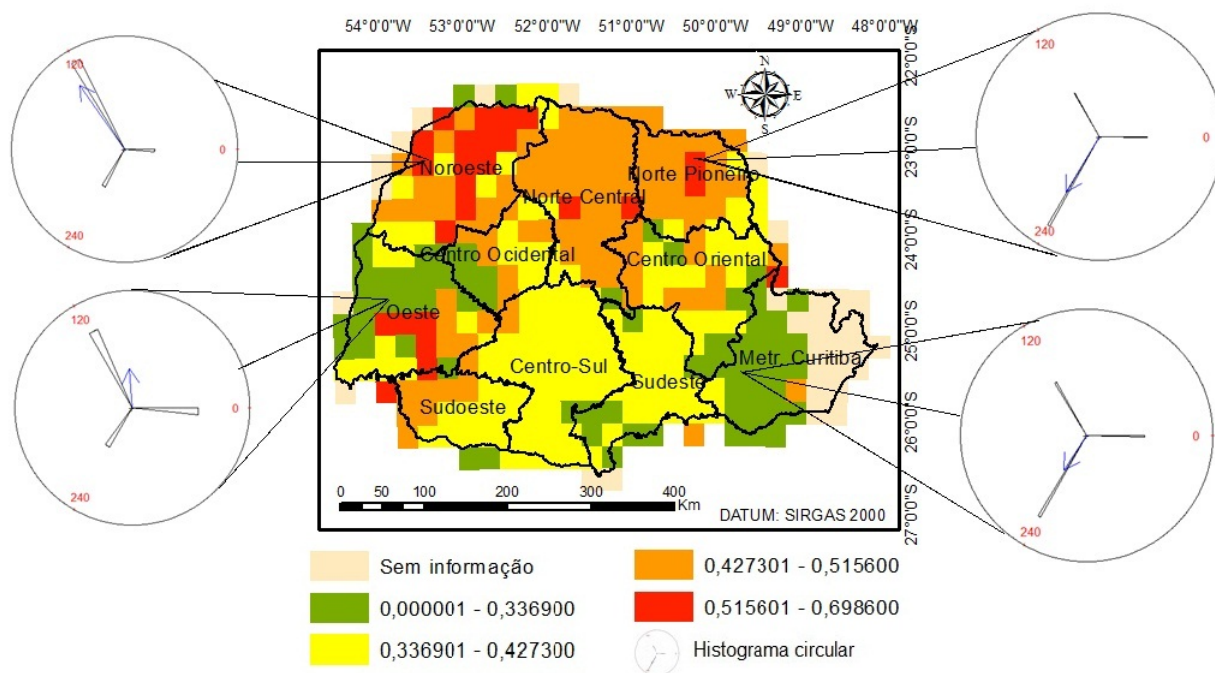


Figura 3: Mapa do: comprimento do vetor médio (R), considerando um intervalo de variação decencial a partir de um decêndio antes até um decêndio depois do pico vegetativo

Ao considerar a variação decencial a partir de dois decêndios antes até dois decêndios depois do pico vegetativo (Figura 4), observou-se que dentre as regiões com maiores valores de produtividade (Norte Central, Centro Oriental e Norte Pioneiro) ocorreu uma moderada uniformidade na distribuição de chuva no intervalo considerado. Isto também observado pelo histograma circular de uma estação localizada na mesorregião do Norte Pioneiro, por meio do comprimento do vetor médio (Figura 4).

Para as demais mesorregiões com maiores produtividade (Figura 1a), tem-se que a distribuição da chuva é de maneira uniforme no intervalo considerado anteriormente, isso pode ser observado no gráfico do histograma circular (Figura 4), de uma estação localização na região metropolitana de Curitiba.

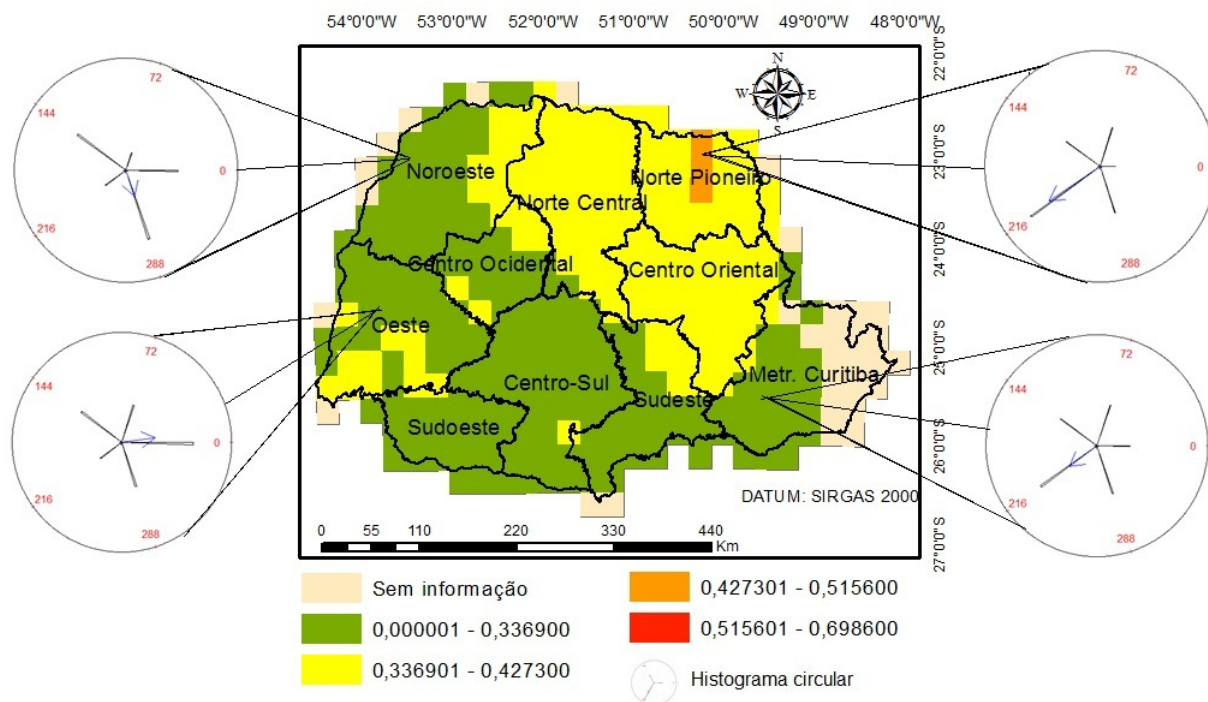


Figura 4: Mapa do: comprimento do vetor médio (R), considerando um intervalo de variação decendial a partir de dois decêndios antes até dois decêndios depois do pico vegetativo

Por fim, nas regiões com menor valor de produtividade, considerando a variação decendial a partir de dois decêndios antes até dois decêndios depois do pico vegetativo (Figura 4), ocorrendo uma distribuição uniforme da chuva no intervalo considerado. Nota-se também está uniformidade pela representação gráfica do histograma circular (Figura 4), em relação ao comprimento do vetor médio de duas estações localizada na região Noroeste e Oeste.

Conclusões

Verificou-se que nas mesorregiões com maior produtividade da cultura da soja no estado para o ano-safra de 2011/2012, ocorreram um maior volume de precipitação no momento do pico vegetativo e nas variações dos intervalos considerados, sendo neste a distribuição da chuva de maneira moderada. Entretanto, para as mesorregiões com menor produtividade, ocorreram menor volume de chuva no pico vegetativo e nas variações de intervalos, sendo que esse volume de chuva ocorreu de forma mais distribuída ao longo dos intervalos considerados.

Agradecimentos

A CAPES pelo apoio financeiro e aos membros do Laboratório de Estatística Aplicada pelo auxílio computacional.

Referências

- BESKOW, S.; MELLO, C. R.; FARIA, A. C.; SIMÕES, M. C.; CALDEIRA, T. L.; NUNES, G. S. Índices de sazonalidade para regionalização hidrológica de vazões de estiagem no Rio Grande do Sul. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, Campina Grande- PB, v. 18, n. 7, p.748-754, fev. 2014.
- ECMWF, European Centre for Medium-Range Weather Forecasts. 2018. Disponível em: <http://spirits.jrc.ec.europa.eu/download/downloaddata/downloadmeteodata/>.
- EMBRAPA SOJA. **Resultados de pesquisa de soja 1991/92**. p. 816. doc.138. Londrina, Paraná, 1999.
- EMBRAPA SOJA. **Tecnologias de produção de soja Paraná 2003**. p. 11-29, Londrina, Paraná, 2002.
- EMBRAPA. **Ecofisiologia da Soja**. Circular Técnica 48, p. 01-08, Londrina, Paraná, 2007.
- EMBRAPA. **Variabilidade espacial e temporal da produção de soja no Paraná e definição de ambientes de produção**. 1ª edição, p. 19, Londrina, Paraná: Embrapa Soja, 2016.
- IBGE - INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFICA E ESTATÍSTICA. Relatórios metodológicos - Pesquisas Agropecuárias - Departamento de Agropecuária. 2 ed., Rio de Janeiro, 2012.
- JAMMALAMADAKA, S.R.; SENGUPTA, A. **Topics in Circular Statistics**. World Scientific, River Edge, N.J. 2001, p. 1-131.
- KLOSOWSKI, E. S. **Estimativa da Produtividade de Cultivares de Soja por meio do Modelo Soygro para Londrina, Estado do Paraná**. Revista UNIMAR, Maringá – PR. v 19, n. 03, p. 751-765, 1997.
- SEAB- - SECRETARIA DA AGRICULTURA E DO ABASTECIMENTO DO PARANÁ. **SOJA - Análise da Conjuntura**. p. 4-5, Curitiba, 2017.

Cadeias de Markov: uma aplicação de álgebra linear

Lucas Campos de Araújo
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste
kopier_business@hotmail.com

Fabiana Magda Garcia Papani
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste
fgarciapapani@gmail.com

Resumo: Em diversos campos de conhecimento, como na Biologia, Engenharia, entre outros, existem situações em que é desejável criar modelos que forneçam estimativas probabilísticas para os possíveis resultados a longo prazo. Alguns destes modelos podem ser elaborados a partir do conceito de Cadeias de Markov, em que a probabilidade do n -ésimo termo só depende da probabilidade do termo anterior. Estes modelos são conhecidos como modelos 'sem memória'. Pretende-se neste breve trabalho, apresentar o conceito de Cadeias de Markov e um modelo 'sem memória' associado a uma aplicação climática.

Palavras-chave: Probabilidade; Modelo 'sem memória'; previsão do clima.

1 Introdução

Cada vez mais surgem situações em que há necessidade de se conhecer as probabilidades associadas aos possíveis resultados a longo prazo. Por exemplo, na computação surgiu a necessidade de classificar as páginas da web de acordo com sua relevância para promover determinados produtos. Na genética, surgiu a necessidade de se estudar doenças infecciosas que persistem com uma baixa intensidade em uma população por longos períodos e ocasionalmente, um grande número de casos ocorrem simultaneamente na forma de uma epidemia. Estes fenômenos podem ser estudados como se passassem de um determinado estado para o seguinte segundo uma certa probabilidade constante ao longo do tempo. No cenário em que a probabilidade de transição depende exclusivamente do estado em que o fenômeno se encontra e do estado a seguir, o processo é denominado Markov e uma sequência destes processos denomina-se Cadeia de Markov. Este conceito permite, sob certas condições, relacionadas às matrizes envolvidas no processo, fazer previsões a longo prazo.

Neste sentido, este trabalho pretende apresentar o conceito de Cadeias de Markov e um exemplo de aplicação desse processo associado a um exemplo climático. O trabalho está dividido em 3 partes. Primeiramente relembramos alguns conceitos e propriedades de probabilidade úteis para o desenvolvimento do trabalho. Posteriormente, definimos um processo estocástico, Cadeias de Markov e apresentamos algumas propriedades importantes. Finalmente, na última seção apresentamos uma aplicação em um evento climático de modo a determinar se haverá seca ou chuva em uma determinada região a partir de algumas condições iniciais.

2 Alguns aspectos da teoria de probabilidade

Para melhor compreensão do tema abordado e resolução do problema proposto, apresentaremos a seguir as definições e propriedades a respeito da teoria de probabilidade necessárias para a construção do modelo proposto.

Definição 1. O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório será chamado de espaço amostral e denotado por Ω . Todo subconjunto $A \subset \Omega$ será chamado evento. Um evento A ao qual atribuímos uma probabilidade será chamado evento aleatório.

Definição 2. Seja $\mathbb{A}$ um conjunto de eventos aleatórios de $\Omega \neq \emptyset$, satisfazendo as seguintes propriedades:

$$P_1. \Omega \in \mathbb{A};$$

$$P_2. \text{ Se } A \in \mathbb{A}, \text{ então } A^c \in \mathbb{A};$$

$$P_3. \text{ Se } A \in \mathbb{A} \text{ e } B \in \mathbb{A}, \text{ então } A \cup B \in \mathbb{A}.$$

O conjunto $\mathbb{A}$ é chamado álgebra de subconjuntos de Ω .

Proposição 3. *Seja $\mathbb{A}$ uma álgebra de subconjuntos de Ω . Então valem as seguintes propriedades:*

$$P_4. \emptyset \in \mathbb{A};$$

$$P_5. \text{ Para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e para toda sequência de subconjuntos } A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{A}, \text{ temos } \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathbb{A}$$

$$\text{e } \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathbb{A}.$$

Esta proposição diz que uma álgebra é fechada para um número finito de aplicações das operações $\cup$, $\cap$ e c .

Utilizaremos ainda a seguinte propriedade válida para eventos aleatórios:

$$P_{3'}. \text{ Se } A_n \in \mathbb{A} \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots, \text{ então } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathbb{A}.$$

Definição 4. Uma classe $\mathbb{A}$ de subconjuntos de um conjunto não vazio Ω satisfazendo P_1, P_2 e $P_{3'}$ é chamada σ -álgebra de subconjuntos de Ω .

Proposição 5. *Seja $\mathbb{A}$ uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω . Se $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{A}$, então $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{A}$.*

Por exemplo, se $\mathbb{A} = 2^\Omega$ é o conjunto das partes de Ω , temos que 2^Ω é uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω . De fato, pela própria definição de conjunto das partes segue que as propriedades P_1, P_2 e $P_{3'}$ são satisfeitas, isto é

- $\Omega \in 2^\Omega$;
- Se $A \in 2^\Omega$, então $A^c \in 2^\Omega$;
- Se $A_n \in 2^\Omega$ para $n = 1, 2, 3, \dots$, então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in 2^\Omega$.

2.1 Probabilidade

Usaremos em nosso trabalho a definição axiomática para probabilidade que se deve a Kolmogorov. Iremos tomar as probabilidades na σ -álgebra de eventos, com isso, iremos associar a todo $A \in \mathbb{A}$ um número real $P(A)$. Mais precisamente temos:

Definição 6. Uma função $P : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo os axiomas 1, 2 e 3 a seguir é chamada probabilidade finitamente aditiva.

Axioma 1. $P(A) \geq 0$.

Axioma 2. $P(\Omega) = 1$.

Axioma 3. Se $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{A}$ são disjuntos dois a dois, então

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k),$$

Considere-se o Axioma 10 a seguir

Axioma 4. Se $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{A}$ são disjuntos, então

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

Se a função P satisfaz também este axioma, então P é chamada medida de probabilidade ou simplesmente uma probabilidade. Quando P não satisfaz o Axioma 8 dizemos apenas que P é uma medida em $\mathbb{A}$.

Definição 7. Um espaço de probabilidade é uma tripla $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ em que

- i- Ω é um conjunto não vazio;
- ii- $\mathbb{A}$ é uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω ;
- iii- P é uma probabilidade em $\mathbb{A}$.

Alguns exemplos de medidas de probabilidade são:

1. Seja Ω um conjunto qualquer e tome $\mathbb{A} = (\emptyset, \Omega)$. Defina $P(\emptyset) = 0$ e $P(\Omega) = 1$. Então $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ é um espaço de probabilidade trivial.
2. Considere Ω sendo o conjunto dos 2 possíveis resultados no lançamento de uma moeda. Escolhe-se peso de $\frac{1}{2}$ para cada uma das possibilidades, e para qualquer subconjunto de Ω escolhe-se como medida a soma dos pesos dos pontos do conjunto. Então $\mathbb{A}$ é a família de todos os subconjuntos de Ω e $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ é um espaço de probabilidade.

Propriedades

Seja P uma probabilidade em uma σ -álgebra $\mathbb{A}$ e $A \in \mathbb{A}$. Então as seguintes propriedades são consequências dos axiomas anteriormente expostos.

Proposição 8. $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Prova. De fato, pelo Axioma 8, $P(\Omega) = 1$ e $\Omega = A \cup A^c$. Como A e A^c são disjuntos, segue do Axioma 10 que

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$$

Logo, $P(A^c) = 1 - P(A)$. Em particular, $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 0$. □

Proposição 9. $0 \leq P(A) \leq 1$.

Prova. Sabemos por axioma que $P(A) \geq 0$ e da propriedade anterior $P(A^c) = 1 - P(A)$. Logo como $1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c)$ temos,

$$0 \leq P(A) = 1 - P(A^c) \leq 1.$$

□

Proposição 10. Se $A_1 \subset A_2$ então $P(A_1) \leq P(A_2)$.

Prova. Note que, $A_2 = A_1 \cup (A_2 - A_1)$. Pelo Axioma 9, $P(A_2) = P(A_1) + P(A_2 - A_1) \geq P(A_1)$. □

Proposição 11. $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$.

Proposição 12. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Como iremos trabalhar com cadeias de Markov, a definição a seguir será de grande valia.

Definição 13. Seja $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ um espaço de probabilidade. Se $B \in \mathbb{A}$ e $P(B) > 0$, a probabilidade condicional de A dado B é definida por

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, A \in \mathbb{A}.$$

Teorema 14. (Probabilidade total) Se a sequência (finita ou enumerável) de eventos aleatórios $A_1, A_2, \dots$ formar uma partição de Ω , então

$$P(B) = \sum_i P(A_i)P(B \mid A_i), \forall B \in \mathbb{A}.$$

Prova. Suponhamos que $A_1, A_2, \dots$ formam uma partição de Ω , isto é, os A_i são disjuntos e $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$.

Para todo evento $B \in \mathbb{A}$, temos $B = \bigcup_i (B \cap A_i)$. Como os A_i são disjuntos, então os $B \cap A_i$ são disjuntos e

$$P(B) = P\left(\bigcup_i (B \cap A_i)\right) = \sum_i P(B \cap A_i) = \sum_i P(A_i)P(B | A_i), \forall B \in \mathbb{A}.$$

□

2.2 Variável Aleatória

Denomina-se variável aleatória (v.a.) uma variável que tem resultados ou valores que tendem a variar de uma observação para outra em razão de fatores relacionados com a chance.

Definição 15. Uma função $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é denominada variável aleatória, se o conjunto $\{X \leq x\} = \{w \in \Omega : X(w) \leq x\}$ é um evento aleatório (isto é, pertence a σ -álgebra $\mathbb{A}$ de eventos de Ω), para todo $x \in \mathbb{R}$.

Definição 16. Seja X uma variável aleatória. Se o número de valores possíveis de X for enumerável (finito ou infinito), dizemos que X é uma variável aleatória discreta. Ou seja, a imagem da função é $Im(X) = \{x_1, x_2, \dots\} \subseteq \mathbb{R}$.

Exemplo 1. Considere que uma moeda é lançada duas vezes sucessivamente. Seja C cara e K coroa. O espaço amostral deste experimento é:

$$\Omega = \{(C, C); (C, K); (K, C); (K, K)\}.$$

Tomemos a σ -álgebra deste exemplo como sendo o conjunto das partes 2^Ω . Podemos definir a função X como sendo o "número de caras obtidas nos dois lançamentos". Por exemplo, temos que $X((C, C)) = 2$ e $X((K, C)) = 1$. Note que, $X(w) \in \{0, 1, 2\}, \forall w \in \Omega$.

A função $X : \Omega \rightarrow \{0, 1, 2\}$ é tal que $\{w : X(w) \leq x\} \in 2^\Omega$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por exemplo, se $x = 1$ temos que $\{w : X(w) \leq 1\} = \{(C, K), (K, C), (K, K)\} \in 2^\Omega$ e se $x = -1$, temos $\{w : X(w) \leq -1\} = \emptyset \in 2^\Omega$. Note que X é uma variável aleatória discreta.

Exemplo 2. Suponha que uma instituição de ensino esteja interessada em saber qual o número de alunos presentes nas aulas de um determinado professor, em certo período da sua vida escolar. Se X simboliza este número, então X será uma variável que pode assumir valores inteiros, inclusive o zero. Então: $\mathbb{R}_x = \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$.

Definição 17. Seja X uma variável aleatória discreta. A função $f : \mathbb{R}_x \rightarrow \{0, 1\}$ é definida como função de probabilidade de X se, a cada possível resultado $x_i \in \mathbb{R}_x$, com $\mathbb{R}_x = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$, associarmos um número $p(x_i) = P(X = x_i)$, denominado probabilidade de x_i , satisfazendo as seguintes condições:

$$\begin{aligned} & \cdot p(x_i) \geq 0 \quad \forall i; \\ & \cdot \sum_{i=0}^{\infty} p(x_i) = 1. \end{aligned}$$

Definição 18. Seja X uma variável aleatória. Suponha que os valores possíveis de X sejam quaisquer valores numéricos em um determinado intervalo, ou, coleção de intervalos. Então, dizemos que X é uma variável aleatória contínua.

Exemplo 3. Uma válvula eletrônica é instalada em um circuito, sendo X o período de tempo que a válvula funciona.

Neste caso, X é uma variável aleatória contínua podendo tomar valores no reais positivos, ou seja, o subconjunto dos números reais $[0, \infty[$. No caso contínuo, em geral, usa-se a σ -álgebra de Borel. A grosso modo, é a menor σ -álgebra contendo todos os intervalos, que são gerados pelas operações $\cup, \cap$ e c de intervalos abertos na reta.

3 Espaço de probabilidade para cadeias de Markov

Considere o lançamento de um dado não viciado no tempo $n = 1, 2, \dots, T$. As faces do dado são: 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Denotando por Ω o conjunto de todos os possíveis resultados dos lançamentos até o tempo T , temos:

$$\Omega = \{w : w = (e_1, e_2, e_3, \dots, e_T)\} \text{ em que, } e_n = 1, 2, 3, 4, 5 \text{ ou } 6, \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots, T.$$

O conjunto $\xi = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ que representa os possíveis estados do dado (possíveis resultados em cada lançamento) será chamado de espaço de estados.

Conforme o tempo passa, mais informações aparecem sobre os estados que já ocorreram. Esta informação disponível no tempo n , iremos denotar por F_n , denominada Álgebra de eventos, que consiste nos resultados que ocorreram antes e no tempo n .

Observação 1. F_n é uma álgebra de subconjuntos de Ω .

Definição 19. Uma filtração $\mathbb{F}$ é a coleção de álgebras de eventos F_n , com

$$\mathbb{F} = \{F_0, F_1, \dots, F_n, \dots, F_T\}; F_n \subset F_{n+1}.$$

Definição 20. Um processo estocástico adaptado à filtração $\mathbb{F} = \{F_0, F_1, \dots, F_T\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias (X_n) em (Ω, F_n) , para qualquer n fixado, $n = 0, 1, \dots, T$. Note que, em particular, para cada n , X_n é uma variável aleatória em (Ω, F_T) .

Definição 21. A probabilidade de transição em um passo, denotada por $p_{ij}(k)$, é definida como a seguinte probabilidade condicional:

$$p_{ij}(k) = P(X_{k+1} = i \mid X_k = j).$$

Isto é, a probabilidade de estar no estado i no tempo $k + 1$, dado que estava no estado j no momento anterior k , para $i, j = 1, 2, \dots$

Definição 22. A probabilidade de transição em n -passos ($n \geq 0$), denotada por $p_{ij}^{(n)}$, é a probabilidade de transferência do estado j para o estado i em n etapas de tempo discreto, isto é,

$$p_{ij}^{(n)} = P\{X_n = i \mid X_0 = j\}.$$

Definição 23. Considere um espaço de estados com um número finito (ou enumerável) de elementos $\xi = \{e_1, \dots, e_n\}$. Um processo estocástico discreto $(X_n)_{n \in N}$ é uma cadeia (ou processo) de Markov se a probabilidade condicional satisfazer

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n),$$

para todo $n \geq 1$ e para toda sequência $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ de elementos do espaço de estados ξ . Essa condição significa, em linguagem natural, pensando que n indica o tempo, que o futuro do processo, uma vez conhecido o estado presente, é independente do passado.

As probabilidades condicionais, como já mencionadas anteriormente,

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = e_i \mid X_n = e_j),$$

são chamadas probabilidades de transição. E se para cada i, j

$$P(X_{n+1} = e_i \mid X_n = e_j) = P(X_1 = e_i \mid X_0 = e_j),$$

para todo natural n , a cadeia de Markov é dita estacionária.

4 Aplicação das Cadeias de Markov

Um processo de Markov está completamente definido a partir do momento em que se especifica as probabilidades de transição e a distribuição inicial de probabilidades dos estados.

Agora, iremos estudar convergência das distribuições de probabilidade para uma cadeia finita, cujas probabilidades de transição são todas positivas. Para tal estudo usaremos técnicas de resolução de recorrências lineares não-homogêneas.

Para tal, apresentaremos um modelo que descreve o clima que possui dois estados: chuva e seca. Neste modelo é dado as probabilidades de transição e a distribuição inicial do clima. Apesar de simples, ele é suficiente e interessante para o propósito do trabalho.

Exemplo 4. Suponhamos que em uma determinada região, observa-se que se chover bastante durante um ano, a probabilidade de que chova bastante no ano seguinte é $\frac{1}{4}$, e que a probabilidade de que faça seca é de $\frac{3}{4}$. Ainda, se houver seca em um ano, no ano seguinte a probabilidade de

haver seca ou chuva suficiente será a mesma, e igual a $\frac{1}{2}$. Suponhamos também, para simplificar (o que não ocorre na prática, embora possamos usar como recurso para ter um indicador da situação), que estas probabilidades não mudem com o decorrer do tempo. Os estados possíveis para este processo são: chuva e seca. Assuma que choveu no primeiro ano ($n = 0$). Estamos interessados em responder as seguintes questões:

- a) Qual é a probabilidade x_n de chover no n -ésimo ano?
- b) Qual é a probabilidade de chover dado que se passou um longo período, ou seja, qual é $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, se existir?

Afim de responder as perguntas acima, denotemos A_n o evento 'chove no n -ésimo ano' e seja $B_n = \Omega - A_n$ o seu complementar, isto é, o evento 'faz seca no n -ésimo ano'. As condições do exemplo nos dá:

$$P(B_{n+1} | A_n) = p = \frac{3}{4} \text{ e } P(A_{n+1} | B_n) = q = \frac{1}{2}$$

Assumimos também que $P(A_0) = 1$, isto é $x_0 = 1$. Utilizando esta notação, temos que $P(A_n) = x_n$. Logo,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= P(A_{n+1}) \\ &= P(A_{n+1} | A_n) P(A_n) + P(A_{n+1} | B_n) P(B_n) \\ &= (1-p)x_n + q(1-x_n) \\ &= q + (1-p-q)x_n \\ &= \frac{1}{2} + (1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{2})x_n \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x_n. \end{aligned}$$

A segunda igualdade segue do teorema 18 (Partição de Ω).

Note que a última igualdade é uma recorrência linear não homogênea de primeira ordem, ou seja, é uma recorrência do tipo $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$. Vamos resolvê-la utilizando o seguinte fato. As recorrências lineares não-homogêneas de primeira ordem que mais facilmente se resolvem, são da forma $x_{n+1} = x_n + f(n)$. Com efeito, temos

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + f(0) \\ x_2 &= x_1 + f(1) \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + f(n-1) \end{aligned}$$

Somando-se todos os membros e utilizando-se da regularidade, obtemos $x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$.

Considerando a_n uma solução não nula da recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n$ a substituição $x_n = a_n y_n$ transforma em

$$x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$$

$$a_{n+1}y_{n+1} = g(n)a_ny_n + h(n)$$

Mas, $a_{n+1} = g(n)a_n$, pois a_n é solução de $x_{n+1} = g(n)x_n$. Portanto, a equação se transforma em

$$g(n)a_ny_{n+1} = g(n)a_ny_n + h(n)$$

$$y_{n+1} = y_n + h(n)[g(n)a_n]^{-1}.$$

Agora, resolvendo a equação $y_{n+1} = y_n + h(n)[g(n)a_n]^{-1}$, que está na forma $y_{n+1} = y_n + f(n)$, como mencionado anteriormente, basta depois tomar $x_n = a_ny_n$.

Voltando a recorrência que tínhamos $x_{n+1} = q + (1-p-q)x_n$, vamos resolvê-la utilizando os comentários anteriores. Inicialmente, vamos encontrar uma solução não nula da recorrência $x_{n+1} = (1-p-q)x_n$. Temos:

$$x_1 = (1-p-q)x_0$$

$$x_2 = (1-p-q)x_1$$

$$\vdots$$

$$x_n = (1-p-q)x_{n-1}.$$

Multiplicando-se todos os termos de cada lado das igualdades, resulta $x_n = (1-p-q)^n x_0$.

Logo, tomando uma condição inicial $x_0 = 1$ temos que $a_n = (1-p-q)^n$ é uma solução não nula da recorrência. Façamos a substituição de $x_n = (1-p-q)^n y_n$. Obtemos então que

$$(1-p-q)^{n+1}y_{n+1} = q + (1-p-q)(1-p-q)^n y_n,$$

e assim

$$y_{n+1} = \frac{q}{(1-p-q)^{n+1}} + y_n,$$

em que $x_0 = (1-p-q)^0 y_0$ e, portanto, $y_0 = x_0 = 1$. Temos então que

$$y_1 = \frac{q}{(1-p-q)^1} + y_0$$

$$y_2 = \frac{q}{(1-p-q)^2} + y_1$$

$$\vdots$$

$$y_n = \frac{q}{(1-p-q)^n} + y_{n-1}.$$

Somando-se os termos de cada lado das igualdades resulta em

$$y_n = y_0 + \frac{q}{(1-p-q)} + \frac{q}{(1-p-q)^2} + \frac{q}{(1-p-q)^3} + \dots + \frac{q}{(1-p-q)^n}.$$

Note que $\frac{q}{(1-p-q)} + \frac{q}{(1-p-q)^2} + \frac{q}{(1-p-q)^3} + \dots + \frac{q}{(1-p-q)^n}$ é a soma dos n primeiros termos de uma P. G. de razão $\frac{1}{1-p-q}$. E como $y_0 = 1$ temos

$$\begin{aligned} y_n &= 1 + \frac{q}{1-p-q} \left[\frac{\left(\frac{1}{1-p-q}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{1-p-q}\right) - 1} \right] \\ &= 1 + \frac{q}{1-p-q} \left[\frac{1 - (1-p-q)^n}{\frac{(1-p-q)^n}{p+q}} \right] \\ &= 1 + \frac{q(1 - (1-p-q)^n)}{(p+q)(1-p-q)^n}. \end{aligned}$$

Substituindo em $x_n = (1-p-q)^n y_n$ temos

$$\begin{aligned} x_n &= (1-p-q)^n + \frac{(1-p-q)^n q(1 - (1-p-q)^n)}{(p+q)(1-p-q)^n} \\ &= (1-p-q)^n + \frac{q(1 - (1-p-q)^n)}{p+q} \\ &= (1-p-q)^n + \frac{q - q(1-p-q)^n}{p+q} \\ &= \frac{q}{p+q} + \frac{(p+q)(1-p-q)^n - q(1-p-q)^n}{p+q} \\ &= \frac{q}{p+q} + \frac{p(1-p-q)^n}{p+q}. \end{aligned}$$

Logo, a probabilidade x_n para que chova no n -ésimo ano é dada por

$$x_n = \frac{q}{p+q} + \frac{p(1-p-q)^n}{p+q}.$$

Como $p = \frac{3}{4}$ e $q = \frac{1}{2}$ temos

$$x_n = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \left(\frac{-1}{4} \right)^n.$$

Agora, como $0 < p < 1$ e $0 < q < 1$ segue que $|1-p-q| < 1$, e assim $(1-p-q)^n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Isto nos dá a resposta do item b) deste exemplo, isto é, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{q}{p+q} = \frac{2}{5}$.

O objetivo principal agora, é mostrar que de fato o modelo apresentado no exemplo é uma cadeia de Markov, ou seja, $P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n)$.

Prova. Considere o processo estocástico (X_n) e o espaço de estados $\xi = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\}$, sendo $\mathbf{1}$ o estado de chuva(p) e $\mathbf{2}$ o estado de seca(q) igualmente definidas no exemplo. Tomaremos Ω como o conjunto de todas as sequências $(\Omega = \{p, (1-p), q, (1-q)\})$.

Consideremos, também, um vetor $v^0 \in \mathbb{R}^n$ como sendo alguma probabilidade em ξ . Pelas informações do problema temos que $v^0(\mathbf{1}) = 1$ e $v^0(\mathbf{2}) = 0$, pois há chuva no primeiro ano. A medida de probabilidade v^0 escolhida, corresponde a distribuição inicial do processo estocástico que iremos definir. Podemos então definir P da seguinte forma.

Se $w = (e_0, e_1, \dots) \in \Omega$, tomemos

$$P(\{w \in \Omega : w_0 = e_0\}) = v^0(\{e_0\})$$

$$P(\{w \in \Omega : w_i = e_i, i = 0, \dots, n+1\}) = p(e_{n+1} | e_n) P(\{w \in \Omega : w_i = e_i, i = 0, \dots, n\}),$$

em que $p(e_{n+1} | e_n)$ é a probabilidade de transição do estado e_n para e_{n+1} , podendo ser $p(\mathbf{1} | \mathbf{1}) = 1-p$, $p(\mathbf{1} | \mathbf{2}) = q$, $p(\mathbf{2} | \mathbf{1}) = p$ e $p(\mathbf{2} | \mathbf{2}) = 1-q$.

Note que P está definida por meio de um processo indutivo que só depende da distribuição inicial e das probabilidade de transição. Por exemplo, para o caso em que restringimos aos estados e_0 , e_1 e e_2 , temos

$$\begin{aligned} P(\{w \in \Omega : w_0 = e_0, w_1 = e_1, w_2 = e_2\}) &= p(e_2 | e_1) P(\{w \in \Omega : w_0 = e_0, w_1 = e_1\}) \\ &= p(e_2 | e_1) p(e_1 | e_0) v^0(\{e_0\}). \end{aligned}$$

Além disso, como $\Omega = \{w \in \Omega : w_0 = \mathbf{1}\} \cup \{w \in \Omega : w_0 = \mathbf{2}\}$ segue que $P(\Omega) = v^0(\Omega) = 1$. E pelo processo estocástico $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, dado por $X_n(w) = w_n$, em que $w = (w_0, w_1, \dots, w_n, \dots)$. Primeiro vamos mostrar que as probabilidades de transição de X_n são o que deveriam ser, isto é,

$$P(X_{n+1} = \mathbf{2} | X_n = \mathbf{1}) = p$$

$$P(X_{n+1} = \mathbf{1} | X_n = \mathbf{2}) = q.$$

Da definição de P temos que

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = \mathbf{2}, X_n = \mathbf{1}) &= P(\{w \in \Omega : w_n = \mathbf{1}, w_{n+1} = \mathbf{2}\}) \\ &= \sum_{e_0, \dots, e_{n-1} \in \xi} P(\{w \in \Omega : w_i = e_i, i = 0, \dots, n-1, w_n = \mathbf{1}, w_{n+1} = \mathbf{2}\}) \\ &= \sum_{e_0, \dots, e_{n-1} \in \xi} p(\mathbf{2} | \mathbf{1}) P(\{w \in \Omega : w_i = e_i, i = 0, \dots, n-1, w_n = \mathbf{1}\}) \\ &= p \sum_{e_0, \dots, e_{n-1} \in \xi} P(\{w \in \Omega : w_i = e_i, i = 0, \dots, n-1, w_n = \mathbf{1}\}) \\ &= pP(X_n = \mathbf{1}). \end{aligned}$$

A segunda igualdade, em que aparece a soma sobre os estados, segue da Proposição 18 tomando uma partição em Ω , por meio de conjuntos formados de trajetórias em que se fixa os primeiros n estados. Pela definição de igualdade condicional e da igualdade anterior segue que

$$P(X_{n+1} = \mathbf{2} \mid X_n = \mathbf{1}) = \frac{P(X_{n+1} = \mathbf{2}, X_n = \mathbf{1})}{P(X_n = \mathbf{1})} = p.$$

Analogamente, segue que $P(X_{n+1} = \mathbf{1} \mid X_n = \mathbf{2}) = q$.

Vamos agora verificar que

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n).$$

De fato,

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) &= \frac{P(X_0 = e_0, \dots, X_n = e_n, X_{n+1} = e_{n+1})}{P(X_0 = x_0, \dots, X_n = e_n)} \\ &= \frac{P(\{w \in \Omega : w_i = e_i, i = 0, \dots, n+1\})}{P(\{w \in \Omega : w_i = e_i, i = 0, \dots, n\})} \\ &= \frac{p(e_{n+1} \mid e_n) P(\{w \in \Omega : w_i = e_i, i = 0, \dots, n\})}{P(\{w \in \Omega : w_i = e_i, i = 0, \dots, n\})} \\ &= p(e_{n+1} \mid e_n). \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que $P(X_{n+1} = e_{n+1} \mid X_n = e_n) = p(e_{n+1} \mid e_n)$. □

Apesar de trabalhosa, a demonstração acima poderia ser adaptada para um processo com mais de dois estados, desde que ξ seja finito.

Conclusões

O trabalho apresenta um conceito geralmente não explorado numa primeira abordagem de Álgebra Linear, seja em curso de graduação em matemática ou engenharias: cadeias de markov. Cabe ressaltar que em diversas situações é necessário se prever as probabilidades dos possíveis resultados a longo prazo. Considerando que a passagem de um estado para outro assuma certa probabilidade, e que a probabilidade de um estado dependa exclusivamente da probabilidade do estado anterior, podemos utilizar o conceito de Cadeias de Markov para determinar previsões a longo prazo.

Referências

- BRZEZNIAK, Z.; ZASTAWNIAK, T. **Basic stochastic processes: a course through exercises**. London: Springer, 1999. (Springer undergraduate mathematics series)
- BOLDRINI, J. L. et al. **Álgebra linear**. 3. ed. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, Departamento de Matemática, 1980.
- JAMES, B. R. **Probabilidade: um curso em nível intermediário**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1996.

A História da Matemática como metodologia de ensino aplicado ao conteúdo de Funções

Johnaton Rocha Pidorodeski
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
natandeski@gmail.com

Lucas Teixeira Bernardo
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
lucastbernardo@gmail.com

Resumo: Este trabalho resulta de reflexões oriundas da prática de ensino relacionada à disciplina de Metodologia de Estágio Supervisionado e Prática de Ensino II, do curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Estadual do Oeste do Paraná, realizada em um colégio cascavelense durante o primeiro semestre de 2018. A finalidade é apresentar e discutir o percurso da seleção de conteúdos e metodologias de ensino adotados neste estágio docente. A questão norteadora dessa análise é: “Como relacionar o ensino do conteúdo de *função* à abordagem metodológica de História da Matemática?”. Assim, é verificado e discorrido acerca deste período de docência em Matemática, buscando responder tal questionamento. Ainda, acredita-se numa proposta de ensino que priorize a formação do cidadão crítico e reflexivo e, para tanto, busca-se o aporte teórico dentre os autores Sá, Souza e Silva (2003), Baraldo (2009), Eves (2011), Maciel (2011) e Roque e Pitombeira (2012); tal como consultamos os documentos norteadores do Ensino da Matemática: as Diretrizes Curriculares da Educação Básica – Matemática (2008) e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio – Linguagens, códigos e suas tecnologias (2006). A metodologia adotada compreende uma pesquisa qualitativa e bibliográfica. Espera-se, com este estudo, trazer importantes contribuições para a prática docente de Matemática.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Conceito de Função; História da Matemática como metodologia.

1 Introdução

Em um contexto de Prática de Ensino e Estágio Supervisionado disposto pela disciplina de Metodologia de Estágio Supervisionado e Prática de Ensino II, pelo curso de Licenciatura em Matemática, pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste, nos foram oportunizados momentos de reflexão acerca da prática docente tradicional no Ensino da Matemática para o Ensino Médio, em instituições públicas de ensino do oeste paranaense.

Neste sentido, quanto ao planejamento de regência docente, deparamo-nos com a necessidade de abordar o conteúdo de *funções*, a ser discutido com estudantes dos primeiros anos do Ensino Médio. Assim sendo, a delimitação desta prática docente envolveu a discussão sobre como abordar os conceitos sobre tal conteúdo: ou de maneira tradicional, ou se deveríamos diversificar as abordagens metodológicas, na busca por aperfeiçoamento metodológico da prática

docente, conforme apontam as Diretrizes Curriculares da Educação Básica – DCEs (2008) e, neste íterim, possibilitar aos educandos “constatar regularidades, generalizações e apropriação de linguagem adequada para descrever e interpretar fenômenos matemáticos e de outras áreas do conhecimento”(PARANÁ, 2008).

Desse modo, ao considerarmos os estudos e reflexões oportunizadas por meio da disciplina de Estágio Supervisionado e Prática de Ensino II, compreendemos as necessidades de que as metodologias de Ensino da Matemática, no ensino regular público, deveriam ser diversificadas das abordagens tradicionalistas. Sendo assim, buscamos envolver os documentos reguladores da educação pública em nosso planejamento docente, como as Diretrizes Curriculares da Educação Básica – DCEs (2008), que sugerem o enfoque do ensino-aprendizagem relacionado ao letramento matemático, mas centralizado na compreensão e apropriação do uso da matemática em seus contextos e entornos, para além da decodificação de conceitos.

Portanto, neste texto, apresentamos 1) reflexões sobre a importância do conhecimento atrelado à evolução da História da Matemática, assim como discutimos sobre 2) a História da Matemática sob o viés da conceituação de *função* e, ainda, sobre 3) a prática docente que relacionou a História da Matemática como uma metodologia de ensino aplicado ao conteúdo de *função*, referente a esta Prática de Ensino e Estágio Supervisionado.

2 A evolução da História da Matemática como método de ensino

Sabe-se que a História da Matemática se desenvolve em diversos períodos da história da humanidade, preservando a evolução das relações matemáticas disposta em suas respectivas civilizações, tal como sua evolução filosófica e usual cotidiana. A exemplo disso, destacamos o uso da matemática pelos “babilônios, por volta de 2000 a.C, [que] acumulavam registros do que hoje pode ser classificados como álgebra elementar”, que se classificam como os primeiros registros da humanidade a respeito de ideias que se originaram das configurações físicas e geométricas, da comparação das formas, tamanhos e quantidade”(PARANÁ, 2008, p. 38).

Destarte, não há como afirmar a existência da Matemática tal qual está posta contemporaneamente, mas sim desenvolvida e constituída historicamente, ampliada por diferentes culturas e localidades, relativo aos diversos problemas e usos do cotidiano. Assim, utilizar a História da Matemática como método de ensino, torna a aprendizagem mais significativa, pois conforme apontam as OCs – Orientações Curriculares para o Ensino Médio – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (2006), deve-se

[...] assumir também as práticas [docentes] como referências e formas de articular teoria e prática, pois, além das pesquisas científicas, fundamentais ou aplicadas, também as práticas domésticas, industriais, ideológicas, políticas e tecnológicas, bem como suas funções sociais, devem servir às escolhas didáticas. (BRASIL, 2006, p. 46).

Isto significa que, estabelecer a História da Matemática como um conhecimento a ser adquirido durante o ensino da matemática, oportuniza que o estudante conheça o surgimento

de seus conceitos, seus desenvolvimentos, suas aplicabilidades, e suas relevâncias. Tal atitude docente encerra a ideia de que a matemática seja irrefutável e somente abstrata, mas torna o aprendizado algo manuseável e palpável aos estudantes; e, inclusive, apresenta que os matemáticos também foram filósofos e se dedicavam a outras áreas além da matemática, integrando a vivência e o uso de várias ciências.

Conforme Lorenzato (2010), ensinar através da metodologia História da Matemática, amplia a capacidade dos alunos em entender que o saber matemático não surgiu em contos de fábulas ou estórias, mas partiu da necessidade do homem em resolver questões existentes em determinadas épocas. Por isso é imprescindível que o professor a utilize em suas aulas, pois além de facilitar a compreensão da matemática, mostra a utilidade didática do erro.

Outro modo de melhorar as aulas de matemática tornando-as mais compreensíveis aos alunos é utilizar a própria história da matemática; esta mostra que a matemática surgiu aos poucos, com aproximações, ensaios e erros, não de forma adivinhatória, nem completa ou inteira. Quase todo o desenvolvimento do pensamento matemático se deu por necessidade do homem, diante do contexto da época. (LORENZATO, 2010, p. 107).

Segundo Viana (2000, p. 3 e 4), a história da matemática pode ser trabalhada em conjunto com as demais tendências na educação matemática – resolução de problema, Etnomatemática, tecnologia na educação matemática, modelagem matemática, investigação matemática. Enriquecendo o plano de aula e trazendo novas experiências tanto para o professor, no processo de elaboração do planejamento, quanto para o estudante no decorrer da aula.

[...] a história da matemática pode ser uma fonte relevante de problemas para serem trabalhados na resolução de problemas, o estudo da solução dada aos problemas reais que foram enfrentados em épocas diversas pode fornecer contribuições relevantes para o desenvolvimento de técnicas de modelagem e para o aprimoramento de modelos já elaborados, o conhecimento da história da matemática dos diversos povos entrelaça-se inevitavelmente com os trabalhos de Etnomatemática... Assim, tal como temos que falar em um determinado idioma, também deveríamos pensar os conteúdos matemáticos, as tendências em educação matemática, de uma [sic] modo histórico, imersas na história, e diríamos que o problema de “usar” a história da matemática deixaria de ser um “problema” teórico e se tornaria uma ação didática efetiva. (VIANNA, 2000, p. 03).

Uma grande conquista, foi a inclusão da História da Matemática como metodologia de ensino nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná, apontando possibilidades para que o professor possa trabalhar, explanando sobre as tendências na educação matemática, destacando também sobre a importância de

[...] entender a história da Matemática no contexto da prática escolar como componente necessário de um dos objetivos primordiais da disciplina, qual seja, que os estudantes compreendam a natureza da Matemática e sua relevância na vida da humanidade. A abordagem histórica deve vincular as descobertas matemáticas aos fatos sociais e políticos, às circunstâncias históricas e às correntes filosóficas que determinaram o pensamento e influenciaram o avanço científico de cada época. A história da Matemática é um elemento orientador na elaboração de atividades, na criação das situações-problema, na busca de referências para compreender melhor os conceitos matemáticos. Possibilita ao aluno analisar e discutir razões para aceitação de determinados fatos, raciocínios e procedimentos. (PARANÁ, 2008, p. 66).

Neste sentido, justificamos nossa aproximação à História da Matemática como metodologia de ensino da Matemática, uma vez que compreendemos como relevantes as transformações que a matemática sofreu com o passar do tempo, o que incute significado ao aprendizado.

3 Um comparativo histórico acerca da conceituação de *função*

Ao decidirmos trabalhar com História da Matemática como metodologia de ensino, observamos, então, a necessidade de relacionar o ensino do conteúdo de *função* à tal abordagem metodológica e, para tanto, embasamo-nos nas pesquisas de Maciel (2011), que discorre sobre esta temática. Sendo assim, o autor conduziu sua pesquisa de acordo com um trabalho com estudantes do ensino médio que já haviam visto o conceito de *função* previamente.

Neste sentido, compreendemos que Vianna (2000), também aponta a abordagem metodológica relacionada à História da Matemática como uma classe de “intervenções [que estão] direcionadas a conduzir o estudante para um determinado tipo de *procedimento* que encontra alguma relação com o desenvolvimento do conteúdo” (VIANNA, 2000, p. 02, *itálico do autor*). Ou seja, tal compreensão relaciona-se com os preceitos de letramento matemático dispostos nas DCEs, como também encontra-se em consonância com as OCs – Orientações Curriculares para o Ensino Médio – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (2006), quanto ao delineamento de conceitos relacionados à compreensão palpável e associação qualitativa dos dados quantitativos explorados nos conteúdos abordados.

Sendo assim, foi necessário que se estabelecessem os conceitos de *função* desenvolvidos historicamente no meio matemático, tanto para nós, como professores-estagiários, quanto para a abordagem a ser desenvolvida em sala de aula. Neste sentido, buscamos a definição atual do conceito de *função*, utilizada em meio acadêmico e difundido nas instituições de ensino, sendo que Iezzi *et al.* (1977) a define da seguinte maneira:

Dados dois conjuntos A e B, não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de aplicação de A em B ou função definida em A com imagens em B se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x,y) \in f$ (IEZZI *et al.*, 1977, p. 74).

No entanto, compreendemos que o conceito de *função* não foi definido dessa maneira como aponta Iezzi *et al.*, mas foram historicamente definidas de acordo com o uso matemático e sua respectiva filosofia, englobando diversas formulações em sua definição. Molina (2001) apresenta, ao refletir acerca dos estudos de Lakatos, que contradiz a ideia de que “a Matemática [é] formada por um conjunto de enunciados indubitáveis, verdadeiros de uma vez para sempre, e não sujeitos à refutação” (MOLINA, 2001, p. 133), mas aponta que “a Matemática não aparece como um reino de verdades eternas. Lakatos mostra como os próprios enunciados e provas matemáticos estão sujeitos à crítica e revisão” (MOLINA, 2001, p. 134); isto é, os conceitos e definições estão sujeitos à modificações históricas, de acordo com sua constituição e utilização durante a história da humanidade.

Desse modo, a questão incitadora para essa reflexão apresenta-se da seguinte maneira:

“como o conceito de *função* foi desenvolvido historicamente?”. Para tanto, reflexionamos sobre os estudos dos autores Sá, Souza e Silva (2003), Baraldo (2009), Eves (2011), Maciel (2011), Roque e Pitombeira (2012), acerca do desenvolvimento histórico desse conceito.

Maciel (2011, p. 10) descreve três períodos históricos da conceituação de *função*, a citar: a **Antiguidade** – onde o conceito de *função* apresenta-se de forma implícita, relacionando valores que dependem de outros, por consequência das gradativas experimentações do homem ao contrapor determinados conjuntos de objetos; como, por exemplo, associar uma pedra para cada animal de um rebanho, quantitativamente –; a **Idade Média** – o conceito de *função* é correlacionado às representações mecânicas e geométricas, onde é teorizada a representação de uma quantidade variável por meio de uma curva, como por exemplo, a velocidade de um determinado objeto –; a **Idade Moderna** – o conceito de *função* “passa a ser representado por expressões analíticas” (MACIEL, 2011, p. 10), onde especificam-se o uso de letras para representar incógnitas e fixam-se as ideias de variável dependente e independente.

A partir de tais reflexões onde destacam-se os três períodos supracitados, objetiva-se o desenvolver do conceito sobre a Idade Moderna, visto que esse período histórico concentra a evolução do conceito de *função* aos quais atentamo-nos neste trabalho. Então, destacamos os matemáticos que apresentam suas respectivas conceituações sobre *funções* relativos ao período Moderno, já descritos por Maciel (2011), a citar James Gregory (1638 - 1675), Leonhard Paul Euler (1707 - 1783), Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 - 1859) e Nicolas Bourbaki¹

Os autores Sá, Souza e Silva (2003), relacionam o matemático James Gregory (1638 - 1675), apresentando sua definição conceitual de *função*:

Nós chamamos uma quantidade x composta de outras quantidades $a, b, \dots$ se x resulta de $a, b, \dots$ pelas quatro operações elementares, por extração de raízes ou por qualquer outra operação imaginável. (SÁ; SOUZA; SILVA, 2003, p. 136).

Sendo assim, para o matemático James Gregory (1638 - 1675) as características específicas sobre o conceito de *função* vinculam-se com a relação interdependente de uma quantidade numérica vinculada a uma incógnita “ x ”, utilizando as quatro operações matemáticas elementares, sendo que a ideia de abstração relacionada ao conceito contemporâneo de *função* ainda não se explicitava de mesma maneira.

Já segundo Baraldo (2009) o matemático Leonhard Paul Euler (1707 - 1783) discorre também sobre a definição de variável, que acarretou em posteriores modificações relativas ao conceito de *função*:

Variável é uma quantidade que compreende todos os números nela mesma, tanto positivos, quanto negativos, inteiros e fracionários, os que são racionais, transcendentos e irracionais. Não devemos excluir nem mesmo o zero e os números imaginários. (SIERPINSKA apud BARALDO, 2009, p. 13).

¹Nicolas Bourbaki é o pseudônimo que um grupo de matemáticos, majoritariamente Franceses, formado em 1935, decidiu adaptar para designar um projeto que incluía, para além de seminários, encontros e a publicação de livros, cobrindo aspectos fundamentais em várias áreas da matemática. Disponível em: <http://e-escola.tecnico.ulisboa.pt/personalidade/bourbaki-nicolas/>. Acesso em: 10 out. 2018.

Neste sentido, tal definição acerca das variáveis e de suas composições numéricas, destacam-se de maneira primordial relativamente ao conceito de *função*, que também foi elaborado por Leonhard Paul Euler (1707 - 1783) e exposto por Roque e Pitombeira (2012), apresentando-se da seguinte maneira:

Se certas quantidades dependem de outras quantidades de maneira que, se as outras mudam, estas quantidades também mudam, então temos o hábito de chamar estas quantidades de funções destas últimas. Esta denominação é bastante extensa e contém nela mesma todas as maneiras pelas quais uma quantidade pode ser determinada por outras. Consequentemente, se x designa uma quantidade variável, então todas as outras quantidades que dependem de x , de qualquer maneira, ou que são determinadas por x , são chamadas de funções de x . (EULER apud ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 232-233).

Neste ínterim, o matemático Leonhard Paul Euler (1707 - 1783) destaca a significância das relações entre variáveis, sejam elas positivas ou negativas, com a ideia palpável de *função*; ou seja, assim que uma quantidade numérica modifica-se relativamente a outra quantidade numérica destacam-se os vínculos estabelecidos entre elas, apresentando a ideia de *função*.

Já no que se refere ao matemático Peter Gustav Lejune Dirichlet (1805 - 1859) e a definição de *função*, Eves (2011) a apresenta como:

Uma variável é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, nem sempre que se atribui um valor a x , corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a y , então se diz que y é uma função (unívoca) de x . A variável x , à qual se atribuem valores à vontade, é chamada variável independente e a variável y , cujos valores dependem dos valores de x , é chamada variável dependente. Os valores possíveis que x pode assumir constituem o campo de definição da função e os valores assumidos por y constituem o campo de valores da função. (EVES, 2011, p. 661).

A conceituação de variável, então, relaciona-se com a noção de que haverá uma quantidade de elementos associados a um símbolo. Assim, caso haja alguma relação entre duas variáveis, onde cada qual corresponde a um valor diferente, trata-se de uma *função* unívoca, ou seja, não é necessário que haja uma lei de formação específica para esta relação entre variáveis. Assim, enquanto são atribuídos valores quaisquer à variável independente x , a variável y torna-se dependente de x , por estar relacionada a ela. Portanto, x pode constituir o campo de definição da *função* e y o campo de valores da *função*.

Sendo assim, o matemático Peter Gustav Lejune Dirichlet (1805 - 1859) restringe e delimita as possibilidades que compõem a conceituação de *função*. Quando apresenta as noções de que as variáveis representam conjuntos que refletirão particularmente a outro conjunto, destaca que não é necessária uma correlação estabelecida por uma lei de formação. Portanto, o matemático Peter Gustav Lejune Dirichlet (1805 - 1859) discorre sobre as ideias de restrição no domínio de uma *função*, destacando, deste modo, a modificação evolutiva do conceito de *função* e seus elementos integrantes e característicos, superando os conceitos desenvolvidos pelos teóricos anteriormente supracitados.

Por fim destacamos Nicolas Bourbaki (1952), que possui atuação destacável na área da

matemática a partir da década de 1950, no que tange a seguinte definição de *função*, segundo Sá, Souza e Silva (2003):

Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F é dita uma relação funcional de E em F, se qualquer que seja x E, existe um e somente um elemento y a F que estejam associados a x na relação considerada. Dá-se o nome de função a operação que desta associa a todo o elemento x a E o elemento y a F que se encontra ligado a x na relação dada; diz-se que y é o valor da função para o elemento x, e que a função está determinada pela relação funcionais equivalentes determinam a mesma função. (SÁ; SOUZA; SILVA, 2003, p.138).

Ao apresentar tal definição por Nicolas Bourbaki (1952), o mesmo sintetiza os conceitos apresentados pelo matemático Peter Gustav Lejune Dirichlet (1805 - 1859), já que apresentou de forma simplificada a correlação entre dois conjuntos, seguindo o conceito de variável dependente e independente, possibilitando classificar uma relação dentre conjuntos como uma *função*, sendo que para cada valor numérico atribuído a x existe somente um em correlação a y.

Desse modo, por meio de uma revisão bibliográfica, pudemos constatar a evolução da conceituação de *função*, no que diz respeito à sua complementação e abrangência. Tal raciocínio evolutivo foi desenvolvido por nós anteriormente à prática docente e, então, transmitida aos estudantes do primeiro ano de Ensino Médio, mediante a abordagem da História da Matemática como metodologia de ensino, descrito em seguida.

Do planejamento à prática: a História da Matemática como metodologia de ensino aplicado ao conteúdo de *Funções*

A partir do estudo da obra A construção do conceito de *função* através da história da Matemática, do autor Maciel (2011), foram oportunizados materiais didáticos relacionados aos conceitos de *função* de acordo com a História da Matemática como abordagem metodológica. Neste material didático, estão disponibilizados vídeos que apontam a evolução da ideia de *função* desde a Antiguidade, descrevendo as primeiras noções de dependência entre valores de um grupo A, sobre os valores de um grupo B, em diferentes campos do conhecimento – desde a física, até a matemática.

Desse modo, a partir destes materiais didáticos oferecidos pelo autor Maciel (2011), em sua dissertação A construção do conceito de *função* através da história da Matemática, tal vídeo² foi apresentado aos estudantes, destacando a relevância da linha de raciocínio disposta desde as primeiras noções de *função*. Assim, os exercícios propostos, relacionaram-se inicialmente com o desenvolver histórico descrito no vídeo, apresentando, portanto, as primeiras conceituações de *função*, tal como apresenta Maciel (2011).

Sendo assim, um dos exercícios destacáveis para a compreensão de valores numéricos variáveis correspondentes e as relações entre dois grupos dependentes, disponibilizamos o se-

²Disponível em: <https://youtu.be/pYQzdY40yr8?list=PL47eoQ3wUx8YYo7x0S1ThHPxZ7dZx2o_J>. Acesso em: 12 out. 2018.

guinte enunciado: “Uma livraria recebe certo livro por um custo de R\$ 40,00 por exemplar. O gerente vendeu inicialmente 36 desses livros por semana a R\$ 100,00 cada. Sabendo que, se reduzisse o preço de cada livro de R\$ 5,00 por semana, venderia mais 6 livros por semana, resolveu experimentar e foi reduzindo o preço do livro R\$ 5,00 a cada semana”. Destarte, foram trabalhadas as noções de 1) preço de custo de cada livro; 2) a variação de preços de cada livro; 3) a variação de número de livros vendidos; 4) a variação de lucro obtido em cada venda; e, 5) o lucro total semanal da venda de livros.

Neste sentido, destacamos a importância da demarcação de informações de variações numéricas relacionadas a uma ordem formativa, incutindo discussões sobre as conceituações acerca de *funções* seguintes à estudada, de maneira acessível aos estudantes.

Já a abordagem relacionada ao segundo vídeo³ de Maciel (2011), disponibilizado aos estudantes, abarcou a evolução conceitual de *funções* no que tange a compreensão da formalização de uma representação matemática sobre aquilo que se discute; ou seja, sobre assumir um gráfico em um sistema cartesiano de coordenadas como representação de uma *função* e, uma lei de formação por padrões que os fenômenos descrevem. Ainda, conjuntamente foi apresentado o terceiro vídeo⁴ desta série, que também apresenta formalmente a noção de variável, tal como as quantidades dependentes dessa variável. Além disso, descreve a noção de lei de formação.

Sendo assim, as atividades propostas relacionaram-se acerca da compreensão dos vínculos entre o plano cartesiano de coordenadas e gráficos representativos de *funções*, como também tal evolução conceitual e representativa de *função* e sua respectiva lei de formação: “Uma garrafa de 500 ml de suco concentrado deve ser dissolvida em 1 litro de água para obtermos um suco reconstituído”, que abarcou as seguintes questões: 1) “Se utilizarmos todo o suco concentrado de uma garrafa, quantos litros teremos de suco pronto para beber?”; 2) “Queremos servir suco no almoço de domingo para toda a família presente. Quantos litros de suco pronto vamos preparar usando 2 garrafas de suco concentrado?”; 3) “[Elabore uma] tabela, onde c é o total de garrafas de suco concentrado e L é o total de litros de suco pronto?”; 4) “Expresse a quantidade de suco pronto L em *função* da quantidade c e de garrafas de suco concentrado ($L(c) =$)”; 5) “Os valores relacionados na tabela podem ser vistos como pares.

Com duas garrafas de suco obtemos exatamente 3 litros de suco pronto. Vamos escrever estar par como (2,3) e representá-lo num sistema de coordenadas cartesianas.”; 6) “Se você continuar a tabela acima e marcar os pontos na figura, o ponto (8,12) vai ser marcado?”; 7) “Você não precisa utilizar uma garrafa inteira de suco concentrado. Que ponto seria marcado se você utilizasse apenas meia garrafa? Marque este ponto no plano cartesiano.”; 8) “Se você marcar na figura outros pontos dados na *função* $L(c)$, com valores cada vez mais próximos uns dos outros, o que vai aparecendo na figura?”. Neste sentido, foram trabalhados com os estudantes algumas das experiências que os matemáticos deste período possuíam, fazendo com que tivessem experiências semelhantes para que construíssem a mesma linha de raciocínio evolutiva da conceituação de

³Disponível em: <https://youtu.be/35OIMMUFAuk?list=PL47eoQ3wUx8YYo7x0S1ThHPxZ7dZx2o_J>. Acesso em: 12 out. 2018.

⁴Disponível em: <https://youtu.be/OK5FrN4E7b4?list=PL47eoQ3wUx8YYo7x0S1ThHPxZ7dZx2o_J>. Acesso em: 12 out. 2018.

funções.

Em relação ao último vídeo⁵ disponibilizado neste conteúdo didático por Maciel (2011), apresentou-se o conceito contemporâneo de *função*, destacando as relações de variáveis com conjuntos, correlacionando-os, a fim de definir *função*. Sendo assim, os exercícios propostos configuraram-se da seguinte maneira: “Construa o gráfico das *funções* abaixo e defina o Domínio, Imagem, Coeficiente Angular e o Coeficiente Linear de cada uma delas: 1) $P(n) = -5n + 100$; 2) $L(n) = -5n + 60$; 3) $N(n) = 6n + 36$; 4) $A(t) = 1,5t$; 5) $P(n) = n + 1$; 6) $L(t) = 2t + 1$ ”.

Neste sentido, então, foram trabalhadas as relações entre as tabelas, os gráficos, os conjuntos, o plano cartesiano, a lei de formação e a finalidade de utilização de *função* no uso cotidiano dos estudantes, como uma retomada de sua importância social descrita durante os vídeos assistidos, tal como na consonância existente deste estudo sobre o desenvolvimento conceitual de *funções* com o material exposto nos livros didáticos – que não possuem a mesma metodologia de ensino por meio da História da Matemática, neste caso.

Conclusões

Ao apresentar pontuais conceituações acerca da reflexão histórica do conceito de *função*, podemos constatar que ao longo do tempo, foram necessárias reformulação quanto aos conceitos matemáticos para que se exprimissem teoricamente a conceituação de *função*, até que se estabelecesse a maneira de compreensão de *função* contemporânea.

Nesse sentido, ao passo em que o estudante desenvolve criticamente os passos percorridos historicamente pelos estudiosos matemáticos, compreendem a necessidade de manutenção dos conceitos no que se refere ao uso cotidiano de conteúdos matemáticos, conforme já exemplificado pelos documentos norteadores do Ensino da Matemática, a citar, por exemplo, os DCEs e OCs.

Isto significa que, nossa escolha metodológica utilizada para esta prática de ensino e estágio supervisionado está em consonância com as predisposições oferecidas pelos documentos norteadores do ensino da matemática sobre o objetivo da educação: proporcionar meios práticos da aplicação teórica dos conhecimentos adquiridos pela humanidade, de forma a contribuir para a vida cidadã e emancipadamente letrada acerca dos conteúdos ensinados em âmbitos escolares.

Referências

BARALDO, B.P.F. **Sobre a necessidade e a viabilidade de um ensino dinâmico de funções**. 2009. Monografia. Instituto de Matemática Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre.

⁵Disponível em: <<https://youtu.be/HZLREejrDP0?list=PL47eoQ3wUx8YYo7x0S1ThHPxZ7dZx2o..J>>. Acesso em: out. 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. Ministério da Educação. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio ? Linguagens, códigos e suas tecnologias.** Brasília, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>.

Acesso em: 12 out. 2018.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**; tradução Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011. 848 p.

IEZZI, G. et al. **Fundamentos de matemática elementar 1: conjuntos e funções.** 3. ed. São Paulo: Atual Editora, 1977. 316 p.

LORENZATO, S. **Para aprender matemática.** 3. ed. São Paulo: Autores Associados, 2010.

MACIEL, P. R. C. **A construção do conceito de função através da história da matemática.** 2011. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática) - Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca. Rio de Janeiro.

MOLINA, J. A. **Lakatos como filósofo da matemática.** Episteme, Porto Alegre, n. 13, p. 129-153, jul./dez. 2001.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica - Matemática.** Curitiba: SEED, 2008.

ROQUE, T. M.; PITOMBEIRA, J. B. **Tópicos de história da matemática.** Disponível em: <http://www.professoresdematematica.com.br/wa_files/Topicos_20de_20Historia_20da_20Matematica>.

Acesso em: 10 out. 2018. SÁ, P. F.; SOUZA, G. S.; SILVA, I. D. B. A Construção do Conceito de Função: Alguns dados históricos. Traços (UNAMA), Belém, v. 6, n. 11, p. 123-140, 2003.

SÁ, P. F.; SOUZA, G. S.; SILVA, I. D. B. **A Construção do Conceito de Função:** Alguns dados históricos. Traços (UNAMA), Belém, v. 6, n. 11, p. 123-140, 2003.

VIANNA, C. R. História da Matemática na Educação Matemática. In: VI ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2000, Londrina. **Anais...** Londrina: UEL, 2000. p. 15-19.

Matrizes e Determinantes: um passeio pela história

Henrique Zanelatto
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
henrique_zanelatto@outlook.com

Ueslei Mallmann
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
ueslei_mallmann@hotmail.com

Francieli Cristina Agostinetto Antunes
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
franciellantunes@gmail.com

Resumo: O presente trabalho busca, por meio de uma pesquisa bibliográfica, discutir o surgimento, uso e formalização do conteúdo de matrizes e determinantes e as maneiras como eram tratadas e entendidas pelos autores em cada época. Em um primeiro momento constatamos que era feito o uso desse conteúdo matemático, mesmo sem o desenvolvimento matemático de formalização, em um segundo momento surge um movimento que busca esclarecer e demonstrar as propriedades dos determinantes e posteriormente as matrizes.

Palavras-chave: História da Matemática; Matrizes e Determinantes; Ensino.

Introdução

As matrizes e os determinantes constituem parte do currículo do Ensino Médio, no Brasil. A metodologia de ensino utilizada, na maioria das vezes, pelos livros didáticos se resume à metodologia tradicional. Isto ocorre porque o conteúdo possui vários conceitos abstratos, dificultando a conexão com o cotidiano dos alunos e do uso de diferentes metodologias sugeridas para seu ensino. Esses itens apontados anteriormente nos levaram a explorar ao longo da história buscando compreender a maneira em que se construiu o conceito de matrizes. Nos questionamos sobre: Qual sua origem? O conceito foi desenvolvido para resolução de algum problema? Como era utilizada inicialmente?

Tendo em vista que os tópicos de matrizes e determinantes são importantes dentro da matemática, em destaque para o avanço e formalização da Geometria Analítica, Álgebra Linear e também para as ciências da computação, este trabalho busca relacionar alguns tópicos históricos que contribuíram para a formalização dos conceitos de matrizes e de determinantes como consta atualmente, como forma de auxiliar o leitor a compreensão da dimensão que estes assuntos proporcionaram na Matemática. Além de buscar responder os questionamentos anteriores, serão descritas algumas contribuições de matemáticos para a construção do conceito e também sua importância dentre os problemas resolvidos.

Na idade antiga

Os primeiros fragmentos relatados historicamente, surgem na dinastia Hamurabi, de 1800 a.C. a 1600 a.C., na Babilônia Antiga. Segundo Santos (2007, p. 4), os sistemas com duas incógnitas eram resolvidos por meio de algumas tabuletas. Os arqueólogos encontraram alguns sistemas simples que se relacionavam a necessidades práticas, onde as variáveis eram grandezas geométricas que representavam comprimento, largura ou área. Para representá-las os babilônios utilizavam palavras que possuíam o significado em seu cotidiano. Isto é, relacionavam as variáveis de acordo com sua necessidade de resolução, como por exemplo, o cálculo de uma determinada medida (comprimento, largura, área, entre outros).

Passados vestígios do final do século II a.C. até II d.C., na China Antiga, surgiu uma nova resolução para este tipo de problema visando a utilização dos coeficientes das variáveis. Esse método adotado pelos chineses era muito eficaz, similar ao método de eliminação de Gauss, que por conseguinte, se assemelha ao método de matrizes utilizado nos dias de hoje. Esse método era operado como um algoritmo, os problemas eram retirados do dia a dia. Em sua resolução eles compunham em um quadro os coeficientes organizados em colunas, as quais representavam cada equação e as linhas o coeficiente da variável por equação. Em seguida, apresentaremos um problema cotidiano da época encontrado nos manuscritos Jiuzhang Suanshu: (“Nove capítulos da arte matemática”).

Três feixes de colheita de boa qualidade, dois feixes de uma qualidade regular e um feixe de má qualidade são vendidos a 39 dou¹. Dois feixes de boa qualidade, três feixes de regular e um de má são vendidos por 34 dou. Um feixe de boa qualidade, dois de regular e três de má, são vendidos por 26 dou. Qual o preço do feixe para cada uma das qualidades? (SANTOS, 2007, p. 9)

A resolução do problema se resumia em resolver um sistema de três equações com três incógnitas. Os chineses organizavam os coeficientes em colunas da seguinte forma:

$$\begin{array}{rrr} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 39 & 34 & 26 \end{array}$$

A resolução consistia em organizar de forma triangular a matriz dos coeficientes e através de um conjunto de comandos eles obtinham a resolução do sistema, de maneira similar com a qual obtemos hoje. Podemos perceber, que se originava parte da estrutura da formação do conceito de matrizes. Em seguida, apresentaremos a forma como os autores posteriores à idade moderna trabalharam com os devidos conhecimentos existentes em civilizações passadas, como os Sistemas Lineares, e seu desenvolvimento ao longo da história.

¹ Dou era a moeda da Dinastia Zhou Ocidental, no período de 748 a. C. a 441 a. C.

Da idade moderna para a contemporânea

Neste período, desenvolveram-se as noções de Sistemas Lineares que haviam sido descobertas no passado. Dessa forma, renomados matemáticos aprofundaram seus estudos neste conceito.

Um dos primeiros matemáticos a ter participação neste desenvolvimento foi Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716). Nascido em Lepizig, na Alemanha, seu trabalho contribuiu para despertar os primeiros vestígios sobre a organização e busca por soluções dos sistemas lineares por meio de determinantes no Ocidente. Leibniz escrevia as equações abaixo uma da outra, formando um sistema de equações lineares. Nesta época, os sistemas lineares já possuíam as características de consistência e inconsistência. Caso possuísse ao menos uma solução, o sistema, denominava-se consistente. Caso não houvesse solução, o Sistema era denominado inconsistente.

Em 1693, buscando resolver um sistema de três equações e três variáveis, Leibniz utilizou o conceito de consistência de sistemas e conseguiu encontrar combinações que se assemelham ao cálculo do determinante de matrizes utilizado hoje em dia. “Essa antecipação dos determinantes por Leibniz só foi publicada em 1850 e foi redescoberta mais de meio século depois.” (BOYER, 1974, p. 297)

Em sequência aos estudos de Leibniz, o processo de desenvolvimento dos sistemas recebeu um grande avanço com os estudos de Colin Maclaurin (1698 - 1746) e Gabriel Cramer (1704 - 1752). Neste momento da história, surgiria a regra de Cramer, que na verdade quem havia lhe dado origem fora Maclaurin. Cramer apenas foi quem publicou a regra dois anos após o falecimento de Maclaurin.

A bem conhecida regra de Cramer, publicada em 1750 por Gabriel Cramer (1704 - 1752) provavelmente era conhecida por Maclaurin desde 1729, quando ele estava escrevendo uma álgebra a título de comentário da *Arithmetica universalis* de Newton. (BOYER, 1974, p. 317)

Maclaurin teve um raciocínio parecido com o método da substituição utilizado nos dias de hoje. Para um sistema linear de duas incógnitas, temos

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}.$$

O método consiste em isolar uma das variáveis nas duas equações. Após este passo, obtemos uma equação somente uma incógnita, sendo assim, obtemos o valor de y , por exemplo, em dependência apenas dos coeficientes. Deste modo, y assumiria o valor

$$y = \frac{af - dc}{ae - db}.$$

Utilizando o mesmo processo, Maclaurin determinava o valor da terceira incógnita em

um sistema de três equações.

$$\begin{cases} ax + by + cz = m \\ dx + ey + fz = n \\ gx + hy + kz = p \end{cases}.$$

Dessa forma, z assumiria o valor

$$z = \frac{aep - ahm + dhm - dbp + gbn - gem}{aek - ahf + dhc - dbk + gb f - gec}. \quad (1)$$

Maclaurin explicava que o denominador consiste, no primeiro caso, da “Diferença dos Produtos dos Coeficientes opostos tirados das Ordens que envolvem duas Quantidades incógnitas”, e, no segundo caso “de todos os Produtos que podem ser formados por três Coeficientes opostos tirados das Ordens que envolvem as três Quantidades desconhecidas”. [...] Os numeradores nos esquemas de Maclaurin diferem dos denominadores apenas pela substituição dos coeficientes dos termos na incógnita procurada pelos termos constantes. (BOYER, 1974, p. 317)

Podemos notar que a solução encontrada para os valores de (1) são os mesmos utilizados na regra de Cramer, apenas não formalizados. Nota-se ainda, que os denominadores encontrados resultam na ideia de determinantes que utilizamos atualmente. Em virtude da qualificação da resolução dos sistemas, surgiu uma visão ainda maior sobre a resolução de um sistema apresentada por Étienne Bézout (1730 - 1783). Seu pensamento foi além de resolver um Sistema Linear. Bezout propôs um estudo discutindo em que circunstâncias seria possível resolver um sistema. Um de seus estudos mais famosos foi as soluções de sistemas lineares e não lineares. “[...] Bézout deu regras artificiais, semelhantes à de Cramer, para resolver n equações lineares simultâneas em n incógnitas?” (BOYER, 1974, p. 341).

Seu pensamento era baseado em comparar equações de qualquer grau a fim de exibir soluções em comum, dando origem ao eliminante, conhecido hoje em dia como método da eliminação. Ao se estudar um sistema homogêneo (termos independentes são nulos), Bézout buscava encontrar valores em que as equações do sistema admitissem outras soluções sem ser a trivial (n -upla nula). Ou seja, dado um sistema linear,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}.$$

O método da eliminação consistia em resolver o sistema homogêneo quando $b_1 = b_2 = 0$. O sistema possuiria solução diferente à trivial $(0, 0)$ quando $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$. Bézout nomeava esta expressão (igual à expressão do determinante atual) de eliminante.

Pode-se perceber que o invariante citado anteriormente já aparecia nos resultados expressos por Maclaurin e também na regra de Cramer. Para um sistema de três equações e três incógnitas

A condição necessária é que o eliminante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

aqui um caso especial do “Bezoutiante”, seja 0. (BOYER, 1974, p. 341)

Vale ressaltar que os elementos dispostos entre as duas barras citados acima, são os coeficientes das equações do sistema linear. Além disso, as combinações que resultavam do eliminante eram as mesmas encontradas nos denominadores dos resultados encontrados na regra de Cramer.

Assim, os conceitos aprimorados por Bézout começaram a adentrar o campo da Geometria. Um dos responsáveis por utilizar desta ideia foi o matemático italiano Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813). Seus principais trabalhos envolviam a Geometria Analítica. Por esta imagem, seus resultados sobre geometria não eram bem vistos, por serem totalmente abstratos. “[...] Sua reputação como físico e químico era talvez maior que a de matemático, pois sua geometria não fora devidamente apreciada” (BOYER, 1974, p. 346). Este período fora marcado pela revolução francesa, a qual havia forte conexão entre os matemáticos da época, como Gaspard Monge (1746 - 1818), Pierre-Simon Laplace (1749 - 1827), entre outros. Monge havia uma conexão por Bézout por seu sucessor na Marinha. Sendo assim, estava ciente das descobertas realizadas anteriormente, assim como Lagrange.

Lagrange utilizou o resultado dos eliminantes concedido por Bézout. Dentre estes resultados, dois foram importantes para o processo de determinantes. Lagrange utilizava as coordenadas de pontos do plano cartesiano com sendo (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) . Assim, formava triângulos no plano e conseguia determinar sua área apenas com as coordenadas dos pontos.

É primariamente a ele (Lagrange) que devemos, embora expressas diferentemente, formas compactas como

$$\frac{1}{2!} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

e

$$\frac{1}{3!} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Para a área de um triângulo e para o volume de um tetraedro, respectivamente, resultados que apareceram num artigo “Solution analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires”, entregue em 1773 e publicado em 1775². (BOYER, 1974, p. 346, parênteses nossos)

Lagrange acreditava que os resultados encontrados seriam importantes para a geometria, uma vez que, as expressões utilizadas para os cálculos de área e volume não dependiam de construções e nem imagens concretas. Apenas com a localização dos pontos e coordenadas seria possível obter estes resultados. Seu trabalho foi totalmente independente de representações

²Obra de Lagrange disponível em Oeuvres, III, p. 658-692.

geométricas, ou seja, não dependia de imagens ilustrativas para representar seus resultados. Em suas palavras, “[...] Parece-me que as soluções que vou apresentar serão de interesse para os geômetras tanto pelos métodos quanto pelos resultados. Essas soluções são puramente analíticas e podem ser entendidas mesmo sem figuras” (LAGRANGE apud. Boyer, 1974, p. 347).

Seguindo os ensinamentos de Lagrange, Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857) contribuiu para o desenvolvimento do conceito de determinantes. A rigorosidade matemática utilizada na abordagem de Lagrange influenciou os estudos de Cauchy que seguia a mesma linha de pensamento, o qual o induziu à formalização dos determinantes. Esta denominação já era empregada em outro ramo matemático, o de funções. Porém, o resultado apresentado pelos eliminantes de Bézout eram muito parecidos. Desta forma, Cauchy decidiu formalizar esta ideia que foi construída ao longo dos anos. “[...] Cauchy tirou o nome “determinante” para o que ele descrevia como uma classe de funções simétricas alternadas sendo $a_1b_1 - b_1a_2$.” (BOYER, 1974, p. 376) Cauchy definiu determinante da seguinte maneira

(Cauchy) começa com os n elementos ou números $a_1, a_2, \dots, a_n$ e forma o produto desses por todas as diferenças de elementos distintos, $a_1a_2a_3 \dots a_n(a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1)(a_3 - a_2) \dots (a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1})$. Define então o determinante como a expressão obtida transformando toda potência indicada em índice, de modo que a_r^s fica $a_{r.s}$; ele escrevia isso como $S(\pm a_{1.1}a_{2.2}a_{3.3} \dots a_{n.n})$. (BOYER, 1974, p. 377, parênteses nossos)

Ao realizar a multiplicação estipulada na definição, obtemos exatamente a expressão encontrada nos denominadores anteriormente calculados por Maclaurin, observando, por exemplo, o caso do determinante três por três. Realizando as multiplicações, resultará em

$$\begin{aligned} & a_1a_2a_3(a_3 - a_1)(a_2 - a_1)(a_3 - a_2) \\ = & (a_1a_2a_3a_3 - a_1a_1a_2a_3)(a_2 - a_1)(a_3 - a_2) \\ = & (a_1a_2a_2a_3a_3 - a_1a_1a_2a_2a_3 - a_1a_1a_2a_3a_3 + a_1a_1a_1a_2a_3)(a_3 - a_2) \\ = & a_1a_2a_2a_3a_3a_3 - a_1a_1a_2a_2a_3a_3 - a_1a_1a_2a_2a_3a_3 + a_1a_1a_1a_2a_3a_3 - a_1a_2a_2a_2a_3a_3a_3 \\ & + a_1a_1a_2a_2a_2a_3 + a_1a_1a_2a_2a_3a_3 - a_1a_1a_1a_2a_2a_3 \\ = & a_1a_2a_2a_3a_3a_3 - a_1a_1a_2a_3a_3a_3 + a_1a_1a_1a_2a_3a_3 - a_1a_2a_2a_2a_3a_3 + a_1a_1a_2a_2a_2a_3 - a_1a_1a_1a_2a_2a_3 \end{aligned}$$

Aplicando as potências em cada termo, obtemos,

$$a_1^1a_2^2a_3^3 - a_1^2a_2^1a_3^3 + a_1^3a_2^1a_3^2 - a_1^1a_2^3a_3^2 + a_1^2a_2^3a_3^1 - a_1^3a_2^2a_3^1,$$

Pela definição de determinantes, temos então

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Tendo como base os elementos dispostos em linhas e colunas que já era representado anteriormente, Cauchy percebeu que o determinante sempre teria a mesma quantidade de linhas

e colunas, sendo assim, o determinante possuiria n^2 elementos, os quais eram denotados por

$$\begin{array}{cccc} a_{1.1} & a_{1.2} & \cdots & a_{1.n} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & \cdots & a_{2.n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n.1} & a_{n.2} & \cdots & a_{n.n} \end{array}$$

Dessa forma, a quantidade de elementos dispostos em forma de linhas e colunas eram simétricos em relação à diagonal formada pelos elementos que estão posicionados em linhas e colunas de mesmo valor $(a_{1.1}, a_{2.2}, \dots, a_{n.n})$. Além disso,

Definia termos conjugados como elementos cuja ordem dos índices está invertida, e chamava termos que são autoconjugados de termos principais; o produto dos termos no que chamamos a diagonal principal ele chamava o produto principal. (BOYER, 1974, p. 377)

Buscando novas aplicações para determinantes Cauchy as encontrou no campo da geometria e também no cálculo. “[...] Numa memória de 1815, sobre a propagação de ondas, ele aplicou a linguagem dos determinantes a um problema de geometria e também a um de física” (BOYER, 1974, p. 377). Na geometria, o estudo foi semelhante ao de Lagrange, utilizando determinantes para encontrar o volume de um paralelepípedo. Outra aplicação foi no estudo de ondas. Neste caso, os elementos do determinante poderiam ser utilizados como as derivadas parciais. “Cauchy denotava como $S(\pm \frac{dx}{da} \frac{dy}{db} \frac{dz}{dc}) = 1$.” (BOYER, 1974, p. 377)

Surge então, em 1928, Carl Gustav Jakob Jacobi (1831 - 1851), matemático de origem alemã, Jacobi foi um dos primeiros a se apropriar da ferramenta de determinantes para estudo de ondas. Expandiu-se então dos sistemas lineares para sistemas de funções, as quais já demandavam a derivada. Desse modo, o estudo já se tornava mais avançado em relação aos sistemas. O determinante das derivadas parciais recebeu o nome de Jacobi devido a este fato.

[...] Em 1829 Jacobi publicou também um artigo em que fazia uso amplo e geral dos jacobianos, exprimindo-os em forma mais moderna do que Cauchy:

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{du}{dx} & \frac{du}{dx_1} & \frac{du}{dx_2} & \cdots & \frac{du}{dx_{n-1}} \\ \frac{du_1}{dx} & \frac{du_1}{dx_1} & \frac{du_1}{dx_2} & \cdots & \frac{du_1}{dx_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{du_{n-1}}{dx} & \frac{du_{n-1}}{dx_1} & \frac{du_{n-1}}{dx_2} & \cdots & \frac{du_{n-1}}{dx_{n-1}} \end{array}$$

(BOYER, 1974, p. 378).

Jacobi passou a chamá-los de determinantes funcionais. Além disso, aprofundou seus estudos com o objetivo de resolver estes sistemas para obter novos resultados para as equações diferenciais. Por outro lado, o conceito de determinante também foi importante para o desenvolvimento do conceito de Matrizes, uma vez que, seus estudos também estavam presentes nos estudos de cônicas da Geometria Analítica.

Um dos primeiros matemáticos a trabalhar com essas ferramentas foi Gabriel Cramer (1704 - 1752). Cramer procurava determinar os coeficientes da cônica $A + By + Cx + Dy^2 +$

$Exy + Fx^2 = 0$, que passa por 5 pontos dados. Se pensava que curvas algébricas distintas de ordem m e n , com $m \times n$ pontos em comum e eram necessários $\frac{n(n+3)}{2}$ pontos para determinar uma curva de ordem n . Havia contudo um paradoxo em que $n > 2$, então:

$$\frac{n(n+3)}{2} \leq n^2$$

Identificando que duas curvas algébricas podem ter mais pontos em comum que o suficiente para determiná-las. Maclaurin, em 1720, foi o primeiro a encontrar o paradoxo e, mais tarde, em 1750, Cramer, reformulou seu sistema indicando que a condição que ao escrever uma matriz quadrada, como por exemplo, um sistema com três incógnitas terá $1 \times 2 \times 3 = 6$ combinações dos coeficientes que passam a ser relacionados a partir de índices 123, 132, 213, 231, 312, 321. Sugerindo ao problema a condição de existência de soluções nulas, gerando assim um sistema inconsistente, segundo perspectiva da época, é dada por

$$ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'' - cb'a''$$

Onde ele denota a matriz que gera essa condição sendo:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}.$$

Com o avanço da geometria analítica, por Pierre de Fermat (1601 - 1665) e Rene Descartes (1596 - 1650), estas noções serviram de base mais tarde para Johan Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), gerando continuidade aos estudos de curvas no plano, mais especificamente as formas quadráticas. Gauss apresenta uma forma simplificada de realizar transformações lineares baseado nos coeficientes de cada equação.

O estudo sobre cônicas continuou sendo desenvolvido por Felix Klein (1849 - 1925) e James Joseph Sylvester (1814 - 1897). Klein por sua vez, conseguiu associar seu estudo ao conceito de transformações que eram formadas por Sistemas Lineares. Assim como Gauss, Fermat, Cramer e Descartes, Klein procurava soluções para intersecções de elementos no campo da geometria. Mais precisamente, seus trabalhos foram voltados para a intersecção entre retas e esferas. “As transformações de contato de Lie³, sistematizadas por Klein, estabeleciam uma correspondência biunívoca entre as retas e esferas do espaço euclidiano de tal modo que retas concorrentes correspondem a esferas tangentes⁴” (COOLIDGE apud. BOYER, 1974, p. 400)

Sylvester por sua vez, foi mais além, e utilizou-se dos estudos sobre as cônicas e os determinantes para gerar um novo ente matemático, as Matrizes. “A principal contribuição de Sylvester em sua abordagem, em relação aos trabalhos de outros matemáticos sobre o mesmo problema, foi o recurso ao cálculo de determinantes⁵.” (BRECHENMACHER apud BERNARDES; ROQUE, 2016, p. 6). Seus estudos estavam diretamente ligados a Cayley e Klein. Os

³Sophus Lie (1842 - 1899), matemático norueguês, estudante contemporâneo de Klein em Göttingen.

⁴Veja Coolidge, History of Geometrical Methods, pp. 298 e seguintes. Referência feita pelo autor Boyer.

⁵Referência feita pelo autor ao texto. (BRECHENMACHER, 2006a.)

elementos utilizados para o cálculo de determinantes precisavam de uma nomenclatura. Como eles que designavam a origem dos determinantes e eram essenciais para os cálculos, a representação em forma retangular já expressa por vários matemáticos anteriores foi dada o nome de Matriz. A definição de Matriz foi exposta da seguinte maneira

nós devemos começar, não com um quadrado, mas com um arranjo retangular de termos consistindo, suponha, de m linhas e n colunas. Isto não representará em si mesmo um determinante, mas, uma Matriz da qual podemos formar vários sistemas de determinantes por fixar um número p , e selecionar quaisquer p linhas e p colunas, os quadrados correspondendo ao que pode ser chamado de determinantes de p -ésima ordem⁶. (SYLVESTER apud. BERNARDES; ROQUE, 2016, p. 2)

Sylvester ainda utilizou a matriz para o estudo do problema dos contatos. Este problema visava o estudo da intersecção entre duas cônicas. Em seu estudo, com a utilização de matrizes, foi possível determinar que era possível obter de zero a quatro pontos existentes na intersecção. Seu estudo foi importante para o desenvolvimento das matrizes, onde junto a Cayley, desenvolveu a noção do polinômio característico de um sistema. Esta noção é bastante utilizada em Álgebra linear hoje em dia. Esta noção foi determinada como teoria das formas. “Em 1854 e 1878 Sylvester publicou quase uma dúzia de artigos sobre formas - polinômios homogêneos em duas ou mais variáveis - e seus invariantes⁷.” (BOYER, 1974, p. 426)

Em sequência, surge Arthur Cayley (1821 - 1895). Matemático de origem britânica, Cayley também era adepto às rigorosidades matemáticas. Dessa forma, se aprofundou nos estudos da geometria analítica, descrevendo um espaço o qual não seria necessário a representação de retas. Tais quais eram construídas analiticamente. “Em 1843 Cayley iniciara a geometria analítica ordinária do espaço n -dimensional, usando determinantes como instrumento essencial.” (BOYER, 1974, p. 395) Além disso, Cayley aprofundou os estudos de transformações de Klein. Desta forma, o surgimento da ideia de matrizes estava próximo. Ao aplicar duas transformações num elemento do espaço, como Klein fez, teríamos⁸

$$T_1 \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}.$$

E

$$T_2 \begin{cases} x'' = Ax' + By' \\ y'' = Cx' + Dy' \end{cases}.$$

Obteríamos como resultado

$$T_1 T_2 \begin{cases} x'' = (Aa + Bc)x + (Ab + Bd)y \\ y'' = (Ca + Dc)x + (Cb + Dd)y \end{cases}.$$

O que já aparecia em estudos anteriores nas relações de intersecções entre cônicas desenvolvido por Gauss e por Klein. Desta forma, Cayley avistou que os coeficientes entre as duas

⁶Referência feita pelo autor ao texto SYLVESTER, 1850b, p. 150. Traduzido pelas autoras.

⁷Boyer traz algumas referências a estes trabalhos sobre a teoria das formas: “Sumários breves de alguns artigos de Cayley sobre quânticas e outros tópicos estão incluídos em Some Great Mathematics of the Nineteenth Century. Veja também History of Elementary Matrix Theory.” Textos devidamente referenciados no final do artigo.

⁸Resultados apresentados no livro de Boyer. Página 424.

transformações formavam uma relação. Tendo em vista que Sylvester já havia determinado o que era Matrizes, Cayley definiu a multiplicação de matrizes como

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA + bC & aB + bD \\ cA + dC & cB + dD \end{pmatrix}$$

Porém, ao se inverter a ordem de multiplicação

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{pmatrix}$$

Dessa forma, percebeu que a multiplicação de matrizes não era comutativa. Além disso, Cayley definiu a operação de soma entre matrizes, multiplicação por um escalar real, matriz identidade e matriz nula. “Em 1858, Cayley publicou uma memória em que definia as operações com matrizes e enunciava as propriedades dessas operações⁹.” (CAYLEY apud. BERNARDES; ROQUE, 2016, p. 2). Portanto, as matrizes receberam suas definições como entes matemáticos. Por fim, o desenvolvimento do conceito de matrizes e determinantes foi um processo com várias etapas de construção e descobertas, com o intuito de resolver problemas matemáticos. Porém, também foram descobertas aplicações em outros meios como o estudo de ondas.

Considerações finais

Ao longo deste trabalho buscou-se apresentar o modo como se desenvolveu os conceitos matemáticos relacionados a matrizes, até seu surgimento. Esta perspectiva foi tomada visando a dificuldade de abordagem do conteúdo no processo de ensino, sendo que sua estrutura abstrata torna o processo de contextualização desafiadora ao professor.

O objetivo do trabalho era utilizar uma historiografia (modo como se conta a história) parecida com o pensamento da escola dos annales. Ou seja, pesquisar sobre a história com uma perspectiva além da ocorrência dos fatos, abordando o impacto num contexto mais abrangente, como social, político, entre outros. Porém, a maioria das referências encontradas focavam na evolução do pensamento matemático. Dessa forma, nossa historiografia acabou recebendo uma característica internalista, a qual se preocupa apenas com o objeto estudado.

Em alguns momentos do trabalho se apresentam ainda o pensar num contexto social, como na idade antiga e a abordagem de sistemas. Pode-se perceber que seu uso era totalmente voltado para o cotidiano. Pudemos perceber também, o impacto de Lagrange no ambiente matemático. Seu trabalho muitas vezes era melhor visto por físicos e químicos ao invés dos matemáticos. Citando este fato, poderíamos pesquisar algo além de suas contribuições para o tema, mas também se haviam relações entre seus estudos e as disciplinas de física e química. Além disso, pode ser destacado a forma como era vista a geometria analítica neste período do fim da idade moderna e início da contemporânea. Para todas as ideias citadas, requereria um trabalho mais aprofundado visando a historiografia externalista, a qual foca em contextos mais abrangentes.

⁹Referência ao texto de CAYLEY, 1858. Devidamente referenciado ao final deste artigo.

Conclui-se que o ensino de matrizes e determinantes possui um caráter abstrato por sua origem ser da geometria analítica, área da matemática que requer um alto grau de abstrações. Porém, podemos ver que ainda assim existem aplicações para seu uso. Hoje em dia, com o avanço tecnológico já possibilita a utilização de matrizes no funcionamento de computadores, celulares, criptografias, etc. Logo, existem maneiras, e elas são relevantes, de tornar seu ensino mais contextualizado as quais retratam a importância da geometria analítica para o campo matemático.

Referências

- BERNARDES, Aline; ROQUE, Tatiana. **História da noção de matriz. Uma releitura sob a luz de novas abordagens historiográficas.** Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 16, nº 31, p. 1-19. Maio 2016.
- BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática.** tradução: Elza F. Gomide. São paulo. Editora: Edgard Blücher, 1974.
- BRECHENMACHER, F. 2006a. **Les matrices: formes de representation et pratiques opératoires (1850-1930).** Site expert des Ecoles Normales Supérieures et du Ministère de l'Education Nationale. Paris, 2006. Disponível em: <<http://www.math.ens.fr/culturemath/index.html>>. Acesso em: 24 jun. 2018.
- CAYLEY, A. 1858. **A memoir on the theory of matrices.** Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 148, 17?37.
- COOLIDGE, Julian Lowell. **A history of Geometrical Methods.** New York, 1963. Publishing company (reprint): Dover. Originally published: Oxford: Clendon press, 1940.
- FIELDMANN, R. W., **History of Elementary Matrix Theory.** The Mathematics Teacher, 55. 1962. 482-284, 589-590, 657-659.
- LAGRANGE, Joseph-Louis. **Oeuvres.** Paris, 1867-1892, volume 3.
- MINHA CHINA. **Moedas Chinesas.** Disponível em: <<http://socrates.if.usp.br/~rkandi/www.minhachina.com/moeda1.htm>>. Acesso em: 25 jun 2018.
- PRASAD, Ganesh. **Some Great Mathematics of the Nineteenth Century.** Benares: Benares Mathematical Society. 1933-1934, II, 1-33.
- SANTOS, Robinson Nelson dos. **Uma breve história do desenvolvimento das teorias dos determinantes e das matrizes.** Dissertação (Conclusão de disciplina). 42 f. Projeto de Ensino de Matemática do curso de Licenciatura em Matemática. Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2007.
- SYLVESTER, J. J. 1850b. **Additions to the articles “on a new class of theorems”, and “on pascal’s theorems”.** In: BAKER, H. F. 1904. The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester, v. 1. Cambridge, University Press. 145?151.

VALIENTE, Elton da Silva Paiva. **Aplicações de Sistemas Lineares e determinantes na Engenharia Civil.** 91 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande - MS, 2015. Disponível em: <<http://petengenhariasifba.com.br/wp-content/uploads/2013/08/Elton-da-Silva-Paiva-Valiente.pdf>>. Acesso em: 5 jun. 2018.

Introdução às Funções e Domínios Convexos

Matheus Alexandre Alves Anzolin
Unioeste - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
matheusalves2107@hotmail.com

Paulo Domingos Conejo
Unioeste - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
pconejo33@gmail.com

Resumo:

Neste trabalho temos interesse em introduzir resultados teóricos sobre funções convexas em domínios convexos. Ainda, mostrar a globalização de uma solução para um problema de Otimização Convexa.

Palavras-chave: Otimização; Conjuntos Convexos; Funções Convexas.

1 Introdução

Determinar uma combinação de semáforos a fim de que o trânsito flua naturalmente sem grandes engarrafamentos, o quão rápido o processador do seu computador pode ficar, investigar se o método de transporte da cidade é melhor possível, todas estas situações que podemos nos deparar no dia-a-dia resume-se em encontrar uma solução de forma que esta seja a melhor possível, envolvendo um ponto máximo, seja de processamento, de quilometragem ou um ponto mínimo, que seja ele de gasto.

É isto que a área da Matemática denominada de Otimização trabalha, busca pontos de máximo ou mínimos de funções. Especificamente um problema de otimização busca maximizar ou minimizar uma determinada função, f , denominada função objetivo, sujeita a determinadas condições, Ω , denominadas restrições (Ribeiro e Karas, 2013). É escrito usualmente na forma

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &\text{Sujeito a } x \in \Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

com $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0, g(x) \leq 0\}$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis.

Quando a função f e seu domínio Ω são ditos convexos, o problema é de otimização convexa. Neste trabalho será apresentado uma breve introdução a respeito desta classe de funções, com algumas definições e resultados importantes. Devida a rica gama de propriedades que tal classe de funções apresenta, os problemas convexos possuem soluções com alta confiabilidade, sem contar que várias das desigualdades conhecidas decorrem da definição destas funções.

1.1 Prelúdio

Nesta seção serão tratados alguns resultados importantes, bem como definições que serão utilizadas como alicerces nos teoremas ao longo do trabalho.

Definição 1. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica. Dizemos que A é definida positiva quando $x^T A x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, sendo denotada simplesmente por $A > 0$. É importante ressaltar que se $x^T A x \leq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, A é denominada semidefinida positiva. Note que agora a desigualdade não é mais estrita, por isso se denota como $A \leq 0$.

Teorema 2. *Taylor de primeira ordem:* Considere $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $a \in \mathbb{R}^n$. Podemos escrever

$$f(x) = f(a) + \nabla f(a)^T (x - a) + r(x),$$

$$\text{com } \lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{\|x - a\|} = 0.$$

Este teorema se fez muito importante, pois o polinômio de ordem 1 de Taylor da função f é uma aproximação linear para a função f em que a vizinhança do ponto a .

Teorema 3. *Taylor de Segunda ordem:* Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável duas vezes e $a \in \mathbb{R}^n$ então,

$$f(x) = f(a) + \nabla f(a)^T (x - a) + \frac{1}{2} (x - a)^T \nabla^2 f(a) (x - a) + r(x),$$

$$\text{com } \lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{\|x - a\|^2} = 0.$$

Definição 4. Considere uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $x^* \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que x^* é um minimizador local de f em Ω quando existe $\delta > 0$, tal que $f(x^*) \leq f(x)$, para todo $x \in B(x^*, \delta) \cap \Omega$. Caso $f(x^*) \leq f(x) \forall x \in \Omega$, x^* é dito minimizador global de f em Ω .

A seguir algumas condições que nos ajudam muito a encontrar mínimos e máximos de funções diferenciáveis, tais serão denominadas como Condições de Otimalidade.

Esta é a condição necessária de 1ª ordem, esta é a condição mais usada quando se pretende encontrar mínimos ou máximos, a grosso modo é derivar e igualar a zero. Aqui será feita a demonstração para o caso de um ponto de mínimo, mas é totalmente análoga para ponto de máximo.

Teorema 5. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável no ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$. Se x^* é um minimizador local de f , então*

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

Prova. Considere $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ arbitrário, ou seja uma direção qualquer, não nula. Como por hipótese x^* é um minimizador local, existe $\delta > 0$, tal que

$$f(x^*) \leq f(x^* + td) \tag{2}$$

$\forall t \in (0, \delta)$. Por Taylor de primeira ordem, conhecida também por Expansão de Taylor, temos que,

$$\begin{aligned} f(x^* + td) &= f(x^*) + \nabla f(x^*)^T(x^* + td - x^*) + r(t) \\ f(x^* + td) &= f(x^*) + \nabla f(x^*)^T td + r(t). \end{aligned}$$

Com $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(t)}{t} = 0$, usando (2) e dividindo por t em ambos os lados, já que $t > 0$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(x^* + td) - f(x^*) = \nabla f(x^*)^T td + r(t) \\ 0 &\leq \nabla f(x^*)^T d + \frac{r(t)}{t} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\nabla f(x^*)^T d \geq 0. \quad (3)$$

Mas como d pode ser qualquer direção não nula, considerando então $\nabla f(x^*)$ não nulo poderíamos tomar $d = -\nabla f(x^*)$ então

$$\|\nabla f(x^*)\|^2 = \langle \nabla f(x^*), \nabla f(x^*) \rangle = \langle \nabla f(x^*), -d \rangle = -\nabla f(x^*)^T d.$$

Disto temos que,

$$-\nabla f(x^*)^T d \leq 0. \quad (4)$$

Então de (3) e (4) chegamos onde pretendíamos, que é

$$0 \leq \nabla f(x^*)^T d \leq 0 \Rightarrow \nabla f(x^*)^T d = 0.$$

□

O próximo teorema nos dá uma condição necessária para que a matriz Hessiana de f no ponto x^* seja semidefinida positiva, e será chamada de condição de segunda ordem.

Teorema 6. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável no ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$. Se x^* é um ponto de mínimo local de f , então a matriz Hessiana de f no ponto x^* é semidefinida positiva, isto é,*

$$d^T \nabla^2 f(x^*) d \geq 0 \quad (5)$$

$\forall d \in \mathbb{R}^n$.

Prova. Considere $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ arbitrário. Por Taylor de segunda ordem obtemos a seguinte equação,

$$f(x^* + td) = f(x^*) + \nabla f(x^*)^T(x^* + td - x^*) + \frac{1}{2}(x^* + td - x^*)^T \nabla^2 f(x^*)(x^* + td - x^*) + r(t)$$

$\Rightarrow$

$$f(x^* + td) = f(x^*) + t \nabla f(x^*)^T d + \frac{t^2}{2} d^T \nabla^2 f(x^*) d + r(t),$$

Com $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(t)}{t^2} = 0$. Pela condição de primeira ordem, temos que $\nabla f(x^*) = 0$, pois x^* é um ponto de mínimo local

$$0 \leq f(x^* + td) - f(x^*) = \frac{t^2}{2} d^T \nabla^2 f(x^*) d + r(t).$$

Dividindo por t^2 em ambos os lados e passando o limite quando $t \rightarrow 0$, obtemos

$$d^T \nabla^2 f(x^*) d \geq 0.$$

□

1.2 Conjuntos Convexos

Tal como está supraescrito, um Conjunto Convexo se constitui num domínio natural para funções convexas, com isso se faz necessário aqui definí-lo e apresentar alguns lemas importantes a respeito do assunto.

Definição 7. Um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é dito convexo quando dados $x, y \in S$, o segmento $[x, y] = (1-t)x + ty; t \in [0, 1]$ estiver inteiramente em S . Na Figura 1 a um exemplo de conjunto convexo e de um não convexo, dito côncavo.

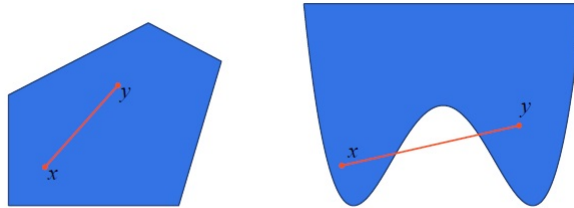


Figura 1: Conjunto convexo e não convexo respectivamente, (Ribeiro e Karas, 2013)

Note que existe um problema quando se pede para encontrar um ponto $x \in S \subset \mathbb{R}^n$, S um conjunto qualquer, mais próximo de um ponto $z \in \mathbb{R}^n$ qualquer, no qual não garantimos unicidade quando a solução existe. Contudo quando S é um conjunto fechado então a solução existe, e ainda se S for convexo então a solução é única e chamada de projeção de z sobre S , que tem por notação $proj_S(z)$. Tal qual na Figura 2.

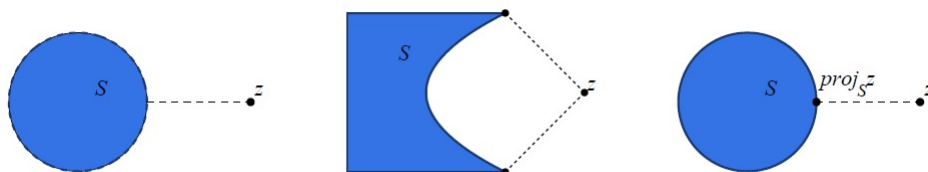


Figura 2: $proj_S(z)$, (Ribeiro e Karas, 2013)

O lema a seguir servirá de arcabouço teórico para a prova do próximo lema, para que assim haja melhor compreensão do que fora usado em sua argumentação.

Lema 8. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$ com $u \neq v$. Se $\|u\| = \|v\| = r$, então $\|(1-t)u + tv\| < r$, para todo $t \in (0, 1)$.

Prova. Pela desigualdade triangular, temos

$$\|(1-t)u + tv\| \leq (1-t)\|u\| + t\|v\| = r. \quad (6)$$

Então, da Álgebra Linear $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$. Logo,

$$(1-t)^2 u^T u + 2t(1-t)u^T v + t^2 v^T v = \|(1-t)u + tv\|^2 = r^2.$$

Note que,

$$\langle (1-t)u + tv, (1-t)u + tv \rangle = r^2.$$

Disto temos que,

$$\|u\|^2 (1-t)^2 + 2t(1-t)\langle u, v \rangle + t^2 \|v\|^2 = r^2.$$

Mas da hipótese obtemos que $\|u\|^2 = r^2 = \|v\|^2$. Então,

$$r^2(1-t)^2 + 2t(1-t)\langle u, v \rangle + t^2 r^2 = r^2$$

$$r^2 2t^2 - 2tr^2 + (2t - 2t^2)\langle u, v \rangle = 0$$

$$2t^2 r^2 - 2tr^2 + 2t\langle u, v \rangle - 2t\langle u, v \rangle = 0$$

$$(r^2 - \langle u, v \rangle)(2t^2 - 2t) = 0$$

$$r^2 - \langle u, v \rangle = 0$$

$$r^2 = \langle u, v \rangle.$$

□

O lema a seguir nos diz exatamente o que a Figura 2 nos retrata, um conjunto convexo e fechado, com uma única projeção como solução.

Lema 9. *Sejam $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não vazio, convexo e fechado. Dado $z \in \mathbb{R}^n$, existe um único $p \in S$ tal que $\|z - p\|_2 \leq \|z - x\|_2$ para todo $x \in S$. Denotaremos $p = \text{proj}_z(S)$*

Prova. Seja $p, \bar{p} \in S$ tal que $p \neq \bar{p}$, então por hipótese temos que

$$\|z - p\| \leq \|z - x\| \quad (7)$$

$$\|z - \bar{p}\| \leq \|z - x\| \quad (8)$$

para todo $x \in S$. Então seja em (7) e (8) respectivamente, $x = \bar{p}$ e $x = p$ obtendo

$$\|z - \bar{p}\| \leq \|z - p\| \text{ e } \|z - p\| \leq \|z - \bar{p}\|.$$

Então,

$$\|z - \bar{p}\| = \|z - p\|. \quad (9)$$

Note que $x = \frac{1}{2}(p + \bar{p})$ está no convexo. E dado um $r = \|z - \bar{p}\| = \|z - p\|$ e $t = \frac{1}{2}$, temos então que

$$\|(1-t)(z-p) + t(z-\bar{p})\| \leq r$$

$$\|z - x\| = \|(1-t)(z-p) + t(z-\bar{p})\|$$

Mas de (7) e (8) temos que,

$$\|z - x\| \leq r$$

uma contradição. Logo $p = \bar{p}$.

□

2 Funções Convexas

Funções convexas é uma classe de funções, que na otimização possuem propriedades bem práticas. Uma função é convexa quando, é definida em um conjunto convexo como domínio, tal que dados dois pontos neste conjunto, a imagem do segmento que os ligam é menor ou igual do que o segmento que liga as imagens dos pontos.

Por isso neste seção apresentamos o conceito de função convexa e resultados teóricos envolvendo estas funções. Mostramos a globalização de uma solução local para um problema de Otimização Convexa e relação da matriz Hessiana com a convexidade de uma função.

Definição 10. Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. Dizemos que a função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa em S quando

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y),$$

para todos $x, y \in S$ e $t \in [0, 1]$.

Note que quando tal desigualdade é invertida a função diz-se não-convexa ou côncava.

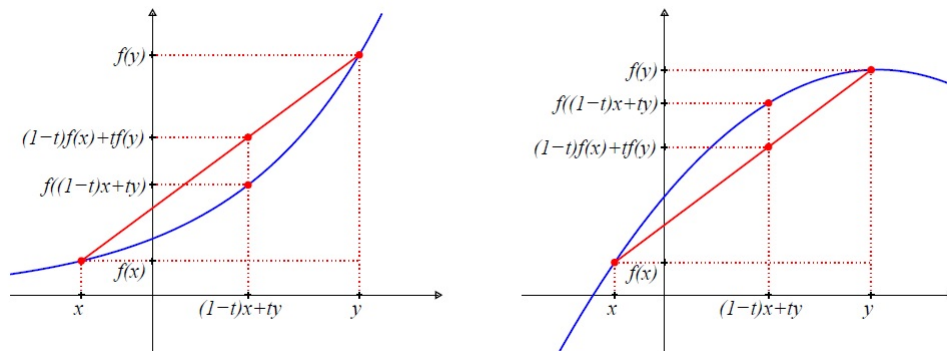


Figura 3: função convexa e não convexa (Ribeiro e Karas, 2013)

Em si o conceito é muito simples, contudo provar que uma função qualquer é convexa, ou não, diretamente pela definição pode vir a ser um trabalho bem árduo, até mesmo se a função for elementar. Como por exemplo a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, é uma função convexa?

Por definição de convexidade de uma função temos que,

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y), \forall x, y \in \mathbb{R}, t \in [0, 1].$$

Temos então

$$\begin{aligned} f((1-t)x + ty) &\leq (1-t)f(x) + tf(y) \\ f(x - tx + ty) &\leq (1-t)f(x) + tf(y) \\ f(x + t(y-x)) &\leq (1-t)f(x) + tf(y) \\ (x + t(y-x))^2 &\leq (1-t)x^2 + ty^2 = x^2 + t(y^2 - x^2) \\ x^2 + 2tx(y-x) + t^2(y-x)^2 &\leq x^2 + t(y+x)(y-x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2tx + t^2(y - x) &\leq t(y + x) \\ 2x + ty - ty &\leq y + x \\ x + t(y - x) &\leq y + x \\ t(y - x) &\leq (y - x) \\ t &\leq 1; t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Portanto a função $f(x) = x^2$ é uma função convexa.

Para justificar o fato das funções convexas serem tão apazíveis para a Otimização Convexa (problema de otimização com função objetivo convexa, e domínio convexo) o próximo Teorema será enunciado, com ele podemos perceber a globalização de uma solução local (um minimizador local para funções convexas é na verdade um minimizador global).

Teorema 11. *Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ convexo e $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Se $x^* \in S$ é um ponto de mínimo local de f , então x^* é um ponto de mínimo global de f .*

Prova. Seja $\delta > 0$ tal que $f(x^*) \leq f(x), \forall x \in B(x^*, \delta) \cap S$. Dado $y \in S; y \notin B$, tome $0 < t < \frac{\delta}{\|y - x^*\|}$. Assim, o ponto $\bar{x} = (1-t)x^* + ty$ é propício para que $\|\bar{x} - x^*\| = \|y - x^*\| < \delta$ seja satisfeita, pois supondo $t = \frac{\delta}{\|y - x^*\|}$ temos que $\bar{x} = x^*(1 + \frac{\delta}{\|y - x^*\|}) + \frac{\delta}{\|y - x^*\|}y = x^* \frac{\delta x^*}{\|y - x^*\|} + \frac{\delta y}{\|y - x^*\|} = x^* + \frac{\delta}{\|y - x^*\|}(y - x^*) \Rightarrow \bar{x} = x^* + \frac{\delta}{\|y - x^*\|}(y - x^*)$.

Aplicando Norma em ambos os lados da equação temos que, $\|\bar{x} - x^*\| = \delta \frac{\|y - x^*\|}{\|y - x^*\|} \Rightarrow \delta = \|y - x^*\|$, ou seja $\bar{x}$ está na fronteira de B . Portanto $\bar{x} \in B(x^*, \delta) \cap S$ com $0 < t < \frac{\delta}{\|y - x^*\|}$. Assim temos que,

$$f(x^*) \leq f(\bar{x}),$$

usando o fato de que f é convexa temos ainda que,

$$f(x^*) \leq f(\bar{x}) \leq (1-t)f(x^*) + tf(y).$$

$\Rightarrow$

$$f(x^*) \leq tf(y).$$

Portanto $f(x^*) \leq f(y) \forall x \in B \cap S$ e $y \notin B$ e $y \in S$. □

Quando temos, além da convexidade do domínio da função a garantia dela ser diferenciável, podemos definir convexidade de uma maneira mais prática. Os resultados apresentados a seguir terão este objetivo.

Teorema 12. *Sejam $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $S \subset \mathbb{R}^n$ convexo. A função f é convexa em S se, e somente se,*

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x)$$

$\forall x, y \in S$.

Ou seja se a função em questão esta acima ou igual do que sua própria aproximação linear então é convexa, valendo a recíproca.

Prova. $\Rightarrow$) Seja f convexa. Para $x, y \in S$ e $t \in [0, 1]$ quaisquer e definindo $d = y - x$, temos por definição de conjunto convexo que $x + td \in S$ e $f(x + td) = f(x + t(y - x)) = f(x + ty - tx) = f((1 - t)x + ty)$ então, utilizando a hipótese de que, $f((1 - t)x + ty) \leq (1 - t)f(x) + tf(y)$ temos o seguinte,

$$\begin{aligned} f(x + td) &\leq (1 - t)f(x) + tf(y) \\ \Rightarrow \frac{f(x + td) - (1 - t)f(x)}{t} &\leq f(y) \Rightarrow f(y) \geq \frac{f(x + td) - f(x) + tf(x)}{t} \\ &\Rightarrow f(y) - f(x) \geq \frac{f(x + td) - f(x)}{t}. \end{aligned}$$

Fazendo $t \rightarrow 0^+$ obtemos

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(y) - f(x) \geq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + td) - f(x)}{t}.$$

Por Taylor de 1º Grau temos que,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + td) - f(x)}{t} = \nabla f(x)^T d.$$

Portanto,

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x).$$

$\Leftarrow$) Considere $z = (1 - t)x + ty$ temos pela hipótese desta vez que,

$$f(x) \geq f(z) + \nabla f(z)^T (z - x) \quad (10)$$

e

$$f(y) \geq f(z) + \nabla f(z)^T (z - y). \quad (11)$$

Multiplicando (10) por $(1 - t)$ e (11) por t e somando-as obtemos,

$$\begin{aligned} (1 - t)f(x) + tf(y) &\geq (1 - t)f(z) + tf(z) + (1 - t)\nabla f(z)^T (z - x) + t\nabla f(z)^T (z - y) \\ &\geq f(z) - tf(z) + tf(z) + \nabla f(z)^T (z - x) - t\nabla f(z)^T (z - x) + t\nabla f(z)^T (z - y) \\ &\geq f(z) + \nabla f(z)^T (z - x) + \nabla f(z)^T (-t(z - x) + t(z - y)) \\ &\geq f(z) + \nabla f(z)^T (z - x) + \nabla f(z)^T (t(x - z) + t(z - y)) \\ &\geq f(z) + \nabla f(z)^T (z - x) + \nabla f(z)^T (tx - tz + tz - ty) \\ &\geq f(z) + \nabla f(z)^T (z - x) + \nabla f(z)^T (t(x - y)) \\ &\geq f(z) + \nabla f(z)^T (z - x) - t\nabla f(z)^T (y - x) \\ &\geq f(z) + \nabla f(z)^T ((z - x) - t(y - x)) \\ &\geq f(z) + \nabla f(z)^T (z - x - ty + tx) \\ &\geq f((1 - t)x + ty) + \nabla f((1 - t)x + ty)((1 - t)x + ty - x - ty + tx) \\ (1 - t)f(x) + tf(y) &\geq f((1 - t)x + ty). \end{aligned}$$

□

O próximo resultado é uma consequência direta do Teorema 12.

Corolário 13. *Sejam $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa, diferenciável e $S \subset \mathbb{R}^n$ convexo. Se $\nabla f(x^*)^T(y - x^*) \geq 0$, para todo $y \in S$, então x^* é um minimizador global de f em S .*

Prova. Por hipótese f é convexa, portanto pelo Teorema 12 temos que,

$$f(x^* + td) \geq f(x^*) + \nabla f(x^*)^T d;$$

$d = y - x^*$. Ainda por hipótese $\nabla f(x^*)^T d \geq 0$ temos que $f(x^* + td) \geq f(x^*)$. $\square$

Por conseguinte serão apresentados alguns lemas e definições que são importantes para os teoremas finais, um destes lemas segue de um exercício do livro (Ribeiro e Karas, 2013).

Definição 14. Dizemos que um ponto b é de fronteira de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ quando qualquer vizinhança de b contém algum elemento de X e algum elemento do complementar de X . O conjunto dos pontos fronteira de X é chamado de fronteira de X e denotado por ∂X .

Definição 15. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é fechado quando contém sua fronteira, ou seja, quando $\partial X \subset X$. Se além disso X for limitado, diremos que ele é compacto.

Definição 16. Definimos como ponto interior de X como sendo um $a \in X \subset \mathbb{R}^n$, quando é centro de alguma bola aberta contida em X , ou seja, quando existe $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subset X$. O interior de um conjunto X é formado pelos pontos interiores a X e denotado por $\text{int}(X)$.

Lema 17. *Sejam $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo, $x \in \partial C$ e $y \in \text{int}(C)$. Então $\forall x, y \in C$ temos que $(x, y] \subset \text{int}(C)$.*

Prova. Por hipótese temos as seguintes afirmações,

$y \in \text{int}(C) \Rightarrow y \in C - \partial C$ e $x \in \partial C \Rightarrow x \in C - \text{int}(C)$. Queremos provar que $(0, 1] \subset \text{int}(C)$.

Pela convexidade de C podemos afirmar que o segmento $(1 - t)x + ty \subset C$ pois $x, y \in C$. Então $\exists t \in (0, 1]$ tal que $(1 - t)x + ty \subset \text{int}(C)$. $\square$

Teorema 18. *(Taylor com resto de Lagrange) Considere $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e $a, d \in \mathbb{R}^n$. Se f é duas vezes diferenciável no segmento $(a, a + d)$, então existe $t \in (0, 1)$ tal que,*

$$f(a + d) = f(a) + \nabla f(a)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(a + td) d.$$

A prova deste teorema também será omitida pois foge do propósito neste momento, ela pode ser encontrada em livros de análise, a ser indicado (Elon, 1976).

A seguir o teorema que abrange todos os tópicos abordados até então, com ele podemos definir de uma maneira diferenciada a convexidade de uma função por meio de uma equivalência entre duas proposições.

Teorema 19. *Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, uma função de classe C^2 e $S \subset \mathbb{R}^n$ convexo.*

i) Se $\nabla^2 f(x) \geq 0$, para todo $x \in S$, então f é convexa em S .

ii) Se f é convexa em S e $\text{int}(S) \neq \emptyset$, então $\nabla^2 f(x) \geq 0, \forall x \in S$.

Prova. i)

Dado $x \in S$ e $d \in \mathbb{R}^n$; $x + d \in S$. Note que pelo Teorema 18, temos que no segmento $(x, x + d)$.

$$f(x + d) = f(x) + \nabla f(x)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x + td) d$$

para algum $t \in (0, 1)$, pois $\nabla^2 f(x) \geq 0$ então $f(x + d) \geq f(x) + \nabla f(x)^T d$. Onde f é convexa pelo teorema anterior. $\square$

Prova. ii)

Se f convexa e $\text{int}(S) \neq \emptyset \Rightarrow \nabla^2 f(x) \geq 0 \forall x \in S$.

Consideremos $x \in \text{int}(S)$. Dado $d \in \mathbb{R}^n$ temos que $x + td \in S$, para t suficientemente pequeno, pois tão próximo de x ficará.

Por hipótese $f(x + td) \geq f(x) + \nabla f(x)^T td$, por outro lado, Taylor de 2ª ordem nos dá

$$f(x + td) = f(x) + \nabla f(x)^T (x + td - x) + \frac{1}{2} (x + td - x)^T \nabla^2 f(x) (x + td - x) + r(x + td) \text{ com}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(x + td)}{\|td\|} = 0.$$

A partir disto obtemos o seguinte,

$$f(x + td) - f(x) - \nabla f(x)^T td \geq 0.$$

Contudo, pela convexidade de f podemos afirmar a luz do Teorema anterior que $f(x + td) \geq f(x) - \nabla f(x)^T td$, e ainda por Taylor de segunda ordem temos que $\frac{1}{2} t^2 d^T \nabla^2 f(x) d + r(x + td) = f(x + td) - f(x) - \nabla f(x)^T td$. Sendo assim $\frac{1}{2} t^2 d^T \nabla^2 f(x) d + r(x + td) \geq 0$. Dividindo por t^2 e fazendo $t \rightarrow 0$ temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x) d + \frac{r(x + td)}{t^2} \geq 0 \Rightarrow d^T \nabla^2 f(x) d \geq 0.$$

Agora considerando $x \in S$ arbitrário, temos que $\exists y \in \text{int}(S)$. Pelo Lema 17, sabemos que $(x, y] \subset \text{int}(S)$ e ainda que $(x, y] = (1 - t)x + ty/t \in (0, 1]$.

Dado $d \in \mathbb{R}^n$, vale $d^T \nabla^2 f((1 - t)x + ty) \geq 0$. Fazendo $t \rightarrow 0^+$ e usando a continuidade de $\nabla^2 f$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} d^T \nabla^2 f((1 - t)x + ty) d \geq 0.$$

$$\Rightarrow d^T \nabla^2 f(x) d \geq 0.$$

$\square$

Note que à luz deste último resultado, a matriz Hessiana da f tem que ser semidefinida positiva para implicar em convexidade.

Considerações finais

Este trabalho é parte de um estudo que está sendo realizado na iniciação científica, onde temos interesse em alguns aspectos da análise convexa voltada para a otimização convexa. Para isso se fez necessário primeiramente estudar os conceitos básicos da otimização, como as condições de otimalidade. Deixamos aqui uma breve apresentação, e consequências simples, mas importantes do ponto de vista da otimização, como por exemplo a globalização de uma solução para um problema de Otimização Convexa (Teorema 11).

Referências

- LIMA, Elon Lages. Curso de Análise. Rio de Janeiro, IMPA, vol. 2, 1976.
- RIBEIRO, Ademir Alves; KARAS, Elizabeth Wegner. Otimização Contínua – Aspectos Teóricos e Computacionais. São Paulo: Cengage Learning, 2013. 300 p.

A axiomática de Peano e a construção dos números naturais.

Fabiana Fatima Delabona
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
fabi.delabona@hotmail.com

Flavio Roberto Dias Silva
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
frdsilva@yahoo.com.br

Resumo: Este trabalho tem como objetivo demonstrar a construção dos números naturais de forma intuitiva através dos Axiomas de Peano, os quais surgem através da necessidade de compreender como são formados os conjuntos numéricos.

Palavras-chave: Números naturais; Axioma de Peano; conjuntos.

1 Introdução

O presente trabalho tem como objetivo apresentar a construção dos conjuntos numéricos, especificamente o conjunto dos números naturais dado intuitivamente através dos Axiomas de Peano, que surge através da necessidade de formalização de conceitos matemáticos através da álgebra, utilizando conceitos lógicos e a axiomatização, uma vez que antes mesmo dessa formalização já era utilizado um modelo de contagem devido às necessidades de quantificação do ser humano ao longo de sua evolução.

Por volta do século XIX, alguns matemáticos desenvolveram um estudo acerca dos conjuntos numéricos e a partir disso começaram a ter sentido lógico matemático, o que até então eram apenas grandes conjuntos de números e operações que intuitivamente estavam corretas sem ter a noção de como era construídas.

Giuseppe Peano foi um matemático que nasceu no século XIX, sendo o autor do que chamamos hoje de Axiomas de Peano, aos quais são utilizados na formação intuitiva dos números naturais, onde, considerando o 0 como número natural, forma-se a ideia de sucessores, a partir disso, define-se as operações de adição e multiplicação. Para a construção desses axiomas, são utilizados alguns conceitos presentes na álgebra. O conjunto dos números naturais é o conjunto de partida para a formalização dos demais conjuntos. Este trabalho será baseado nas ideias contidas no livro de Jamil Ferreira (2013) e no trabalho de Dafne Deparis (2009).

2 Axiomas de Peano

Quando falamos em números naturais, logo nos remete a imagem do zero, um, dois, três e assim sucessivamente, ou seja, que cada número vem logo após o outro sucessivamente

de forma natural. Mas pouco sabemos a forma em que essa sequência é dada e nem como as operações com esses números são definidas, apenas sabemos que um mais um são dois e não sabemos como essa operação chega ao número dois.

Os Axiomas de Peano nada mais é do que a formalização dessa ideia intuitiva da sequência de números naturais. Logo, esses axiomas baseiam-se em conceitos de conjunto e funções e seguem as seguintes condições: Dado um conjunto $\mathbb{N}$, sendo $\mathbb{N}$ o Conjunto dos Números Naturais e uma função denominada S (sucessora), tal que:

$$S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

Axioma 1. S é uma função injetora;

Axioma 2. Há um elemento que pertence a $\mathbb{N}$, o número 0 (zero) ao qual não pertence a imagem da função S , ou seja, 0 não pertence à $Im(S)$;

Axioma 3. (Princípio da Indução Finita). Dado um subconjunto de $\mathbb{N}$ denominado B e as condições abaixo.

- i) $0 \in B$;
- ii) Se $k \in B$, $s(k) \in B$;

Se esse conjunto satisfazer a essas condições, então podemos concluir que $B = \mathbb{N}$.

Definição 1. Um conjunto B é considerado infinito quando existe uma função injetora $f : \mathbb{N} \rightarrow B$, ou seja, o conjunto B será infinito quando conter um subconjunto Y em bijeção com $\mathbb{N}$. Caso ele não for infinito será denominado como finito.

Teorema 2. Se $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é uma função sucessora, tem-se:

- i) $S(n) \neq n, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, nenhum número natural é sucessor de si mesmo;
- ii) $Im(S) = \mathbb{N}^*$, ou seja, 0 não é sucessor de nenhum número natural.

Demonstração:

1. Utilizando o Princípio da Indução Finita e tomando um subconjunto C de $\mathbb{N}$, ao qual contém o elemento n que pertence ao conjunto $\mathbb{N}$ tais que $S(n) \neq n$, será demonstrado que $C = \mathbb{N}(S(n) \neq n)$, para todo n que pertence aos naturais.

Temos que $0 \in C$, pois $S(0) \neq 0$, uma vez que 0 não pertence à imagem de S . Tomando um $k \in C$, será demonstrado que o sucessor de k pertence a C também. De fato, $k \in C \iff S(k) \neq k$, assim, aplicando a função sucessor em ambos os membros de $S(k) \neq k$, obtemos: $S(S(k)) \neq S(k)$, pois S é uma função injetora. Assim, podemos concluir que o sucessor de k pertence ao conjunto C , isso nos garante, pelo Princípio de Indução Finita que $C = \mathbb{N}$.

2. Pelo Princípio da Indução, temos que $C = \{0\} \cup \text{Im}(S)$ (está contido em $\mathbb{N}$): Temos que zero pertence a C e como k pertence a C , isso implica que o sucessor de k pertence à imagem de S que está contido em C , logo, o conjunto C é igual ao conjunto dos naturais e como zero não pertence à imagem de S , logo, $\text{Im}(S) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Definição 3. Dados os números m e n , a adição $m + n$ é definida como:

$$\begin{cases} m + 0 = m; \\ m + S(n) = S(m + n). \end{cases}$$

O conjunto definido pela soma é:

$$S_m = \{n \in \mathbb{N} | m + n \text{ está definida}\}$$

e se zero pertence a esse conjunto e k também, temos então que o sucessor de k também pertence, logo, o conjunto $S_m = \mathbb{N}$, onde $m + n$ está definida para todos os naturais, garantindo que é uma operação em $\mathbb{N}$.

Definição 4. O número natural 1 (um) é o sucessor de zero, ou seja, $S(0) = 1$.

Proposição 5. Para todo número natural m , tem-se $S(m) = m + 1$ e $S(m) = 1 + m$. Portanto, $m + 1 = 1 + m$.

Demonstração:

Temos para $m + 1$:

$$m + 1 = m + S(0) = S(m + 0) = S(m)$$

Para $1 + m$, iremos considerar o conjunto $A = \{m \in \mathbb{N} | S(m) = 1 + m\}$.

Assim, 0 pertence a A , pois o sucessor de zero é um que é igual a um mais zero. Tomando um m que pertence a A , será demonstrado que o sucessor de m pertence a A .

Como $S(m) = 1 + m$, temos, $S(S(m)) = S(1 + m) = 1 + S(m)$.

Ou seja, o sucessor de m pertence a A , logo, pelo Axioma 3, $A = \mathbb{N}$. Podemos definir os demais números naturais conforme já conhecido, ou seja, como temos os símbolos 0 e $1 = S(0)$, temos $S(1) = 2$, $S(2) = 3$, $S(3) = 4$, e assim sucessivamente, logo, $\mathbb{N}$ é composto por $\{0, S(0), S(S(0)), S(S(S(0))), \dots\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Teorema 6. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

A prova desse Teorema é dada pelo princípio de indução, o que nos diz que se tomarmos um conjunto $P = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ como um subconjunto de $\mathbb{N}$ e como ele contém o 0 e os sucessores de seus elementos, logo, $P = \mathbb{N}$.

Proposição 7. A soma de números naturais tem elemento neutro e esse é o $0 \in \mathbb{N}$, isso é, $m + 0 = 0 + m$.

Demonstração: Pela definição de adição, temos que $m + 0 = m$, o que nos resta provar a segunda parte da igualdade, ou seja, $0 + m = m$. Tomando-se o conjunto $D = \{m \in \mathbb{N} | 0 + m = m\}$. Consideremos os dois casos: 1. Temos $0 + 0 = 0$ por definição, isso nos garante que $0 \in D$. 2. Considerando um $k \in D$, resta provar que seu sucessor pertence a D também. Assim, temos: $0 + k = k$ $0 + S(k) = S(0 + k) = S(k)$, logo, $S(k)$ pertence a D e $D = \mathbb{N}$.

Teorema 8. Para os números naturais arbitrários m , n e p , as afirmações a seguir são verdadeiras:

- i) *Associatividade:* $m + (n + p) = (m + n) + p$.
- ii) *Comutatividade:* $n + m = m + n$.
- iii) *Cancelamento da adição:* $m + p = n + p \Rightarrow m = n$.

Demonstração:

- i) Fixando m e n naturais e aplicando em p a indução:

Considerando o conjunto $D_n = \{m \in \mathbb{N} | n + m = m + n\}$. O número 0 pertence a esse conjunto, pois dada a soma $m + (n + 0)$ vai ser igual a $(m + n) + 0$, o que é garantido pela definição de adição. Agora tomando-se um k que também pertence a esse conjunto, será demonstrado que o sucessor de k também pertence, ou seja,

$$m + (n + S(k)) = m + S(n + k) = S(m + (n + k)) = S((m + n) + k) = (m + n) + S(k)$$

De onde podemos concluir que $D_{(n)} = \mathbb{N}$.

- ii) Considera-se o conjunto $D_{(n)} = \{m \in \mathbb{N} | n + m = m + n\}$ e fixando n como um número natural arbitrário.

- (a) Temos, pela Proposição 7 que $n + 0 = 0 + n$, logo 0 pertence a $D_{(n)}$.
- (b) Tomando um $k \in D_{(n)}$, será provado que seu sucessor também pertence a $D_{(n)}$.

Logo, temos:

$$\begin{aligned} n + k &= k + n \\ n + s(k) &= S(n + k) \\ &= S(k + n) \\ &= (k + n) + 1 \\ &= k + (n + 1) \text{ (propriedade associativa)} \\ &= k + (1 + n) \\ &= (k + 1) + n \\ &= S(k) + n \end{aligned}$$

logo, $S(k) \in D_n$.

iii) Considerando novamente o conjunto $D_{(m,n)} = \{p \in \mathbb{N} | m + p = n + p\}$.

(a) Temos novamente pela Proposição 7 que $m + 0 = 0 + n \Rightarrow m = n$, logo $0 \in D_{(m,n)}$.

(b) Tomando-se um $k \in D_{(m,n)}$, será provado que seu sucessor também pertence a $D(m, n)$.

Temos:

$$\begin{aligned} m + k = n + k &\Rightarrow S(m + k) = S(n + k) \\ m + S(k) = n + S(k) &\Rightarrow S(m + k) = S(n + k) \\ &\Rightarrow (m + k) + 1 = (n + k) + 1 \\ &\Rightarrow m + (1 + k) = n + (1 + k) \text{ (associatividade e comutatividade)} \\ &\Rightarrow (m + 1) + k = (n + 1) + k \\ &\Rightarrow S(m) + k = S(n) + k \\ &\Rightarrow S(m) = S(n) \text{(hipótese)} \\ &\Rightarrow m + 1 = n + 1 \end{aligned}$$

Assim, $m + S(k) = n + S(k) \Rightarrow m = n$, logo $S(k) \in D_{(m,n)} = \mathbb{N}$.

Proposição 9. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, tais que $m + n = 0$, então $m = n = 0$.*

Demonstração:

Supondo que $n \neq 0$, ou seja, n é um número do tipo $n = n1 + 1 (n1 \in \mathbb{N})$, logo temos $n = S(n1) = n1 + 1$, assim,

$$0 = m + n = m + (n1 + 1) = (m + n1) + 1 = S(m + n1),$$

aí chegamos a um absurdo, pois o número zero não é sucessor de nenhum número em $\mathbb{N}$, logo, $n = 0$, e disso temos que: $m + 0 = 0 \Rightarrow m = 0$

Definição 10. Dados dois números naturais, m e n , a multiplicação mn é definida como:

$$\begin{cases} m \cdot 0 = 0; \\ m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m. \end{cases}$$

Teorema 11. *Para m, n e p arbitrários, valem as proposições abaixo:*

- i) $mn \in \mathbb{N}$, sendo de fato uma operação dos números naturais;
- ii) elemento neutro, ou seja, $1n = n1 = n$;
- iii) distributividade: $m(n + p) = mn + mp$ e $(m + n)p = mp + np$;
- iv) associatividade: $m(np) = (mn)p$;
- v) $mn = 0 \Rightarrow m = 0$ ou $n = 0$;
- vi) comutatividade: $nm = mn$

Demonstração:

- ii) Para a demonstração de $n1 = n$, temos:

$$\begin{aligned}n1 &= n(0 + 1) \\&= n0 + n(\text{definição de multiplicação}) \\&= 0 + n = n\end{aligned}$$

Para mostrar que $1n = n$, utiliza-se a indução em n , desse modo, temos $1 \cdot 0 = 0$ por definição

Pela hipótese $1n = n$, obtemos $1(n + 1) = 1n + 1 = n + 1$.

- iii) Fixando-se m e n naturais e utilizando a indução em p , e afirmando $P(m, n)(p)$ como $m(n + p) = mn + mp$. Será demonstrado que o conjunto $D_{(m,n)} = \{p \in \mathbb{N} | P_{(m,n)}(p) \text{ é verdadeira}\}$ é igual ao conjunto dos naturais.

Logo, temos:

1. $P(m, n)(0)$ é verdadeira, pois temos que $m(n + 0) = mn$.
2. Se tomarmos um $k \in D_{(m,n)}$, teremos que seu sucessor também pertence a $D_{(m,n)}$, ou seja, $P_{(m,n)}$ obtém-se de $P_{(m,n)}(k)$. Logo,

$$\begin{aligned}m(n + (p + 1)) &= m((n + p) + 1) \\&= m(n + p) + m \\&= mn + (mp + m) \\&= mn + (m(p + 1)).\end{aligned}$$

De 1) e 2), podemos concluir que $D_{(m,n)} = \mathbb{N}$.

- iv) Considerando o conjunto $D_{(m,n)} = \{p \in \mathbb{N} | m(np) = (mn)p\}$ e utilizando a indução em p , temos:

1. $0 \in D_{(m,n)}$, pois $m(n0) = m0 = 0$ e $(mn)0 = 0$.
2. Tomando-se um $k \in D_{(m,n)}$, demonstraremos que seu sucessor também pertence a $D_{(m,n)}$. Desse modo, temos, $m(nk) = (mn)k$, logo,

$$\begin{aligned}m(n(k + 1)) &= m(nk + n) \\&= m(nk) + mn \\&= (mn)k + mn \\&= (mn)(k + 1)\end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que o sucessor de $k \in D_{(m,n)}$, assim, $D_{(m,n)} = \mathbb{N}$.

- v) Para provar que $mn = 0 \Rightarrow m = 0$ ou $n = 0$, suponhamos que $n \neq 0$, ou seja, n é do tipo $n = n1 + 1 (n \in \mathbb{N})$, disso obtemos:

$$m(n1 + 1) = 0 \Rightarrow mn1 + m = 0$$

temos pela Proposição 9 que $mn1 = m = 0$. Da mesma forma, obtemos que $n = 0$.

Proposição 12. *Para todo $m \in \mathbb{N}$, temos que $0m = 0$.*

Demonstração:

Considerando o conjunto $T = \{m \in \mathbb{N} | 0m = 0\}$, temos:

1. $0 \in T$, pois $0 \cdot 0 = 0$, por definição.
 2. Tomando-se um $k \in T$, será provado que seu sucessor também está em T , logo, temos:
 $0k = 0S(k) = 0(k + 1) = 0k + 0$ por definição, logo, $0k + 0 = 0k = 0$ pela hipótese de indução. Podemos concluir que $S(k) \in T$ e $T = \mathbb{N}$.
- vi) Consideremos o conjunto $D_{(m)} = \{n \in \mathbb{N} | mn = nm\}$ e utilizando a indução em $m \in \mathbb{N}$, temos:
 1. $0 \in D_{(m)}$, pois, pela definição de multiplicação temos $m0 = 0$ e pela proposição 4, temos, $0m = 0$. Assim, $m0 = 0m$.
 2. Tomando um $k \in D_{(m)}$, será provado que seu sucessor também está em $D_{(m)}$. Logo, temos:

$$mk = km$$

$$m(k + 1) = mk + m = km + m = (k + 1)m.$$

Podemos concluir que o sucessor de $k \in D_{(m)}$ e $D_{(m)} = \mathbb{N}$.

2.1 Relação de ordem em $\mathbb{N}$

Definição 13. Uma relação binária R em um conjunto não vazio A diz-se uma relação de ordem em A quando satisfazer as seguintes condições, para quaisquer $x, y, z \in A$:

- i) Reflexividade: xRx .
- ii) Antissimetria: se xRy e $yRz \Rightarrow x = y$.
- iii) Transitividade: se xRy e $yRz \Rightarrow xRz$.

Definição 14. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, dizemos que mRn se existir $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$.

Proposição 15. *A relação R é uma relação de ordem em $\mathbb{N}$.*

Demonstração:

1. Reflexividade: Dado $x \in \mathbb{N}$, $x = x + p$ para $p = 0$.
2. Antissimetria: Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, (mRn e nRm) existe $p, q \in \mathbb{N}$ tais que:

$$n = m + p \text{ e } m = n + q.$$

Substituindo a primeira igualdade na segunda temos:

$$m = (m + p) + q = m + (p + q).$$

Logo, podemos perceber que $p + q = 0$, e pela proposição 3, $p = q = 0$.

3. Transitividade: Sejam $l, m, n \in \mathbb{N}$, (lRm e mRn) existe $p, q \in \mathbb{N}$, tais que:

$$m = l + p \text{ e } n = m + q.$$

Substituindo a primeira igualdade na segunda, iremos obter o seguinte resultado:

$$n = (l + p) + q = l + (p + q).$$

Nota-se que $p + q = r$ ($r \in \mathbb{N}$) e desse modo, podemos substituir na última igualdade, ou seja, $n = l + r$. Assim, lRn .

Definição 16. Para $m, n \in \mathbb{N}$, se mRn , onde R é a relação da definição anterior, dizemos que m é menor ou igual a n e será utilizado o símbolo $\leq$ no lugar de R .

Proposição 17. Para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 0$. Em particular, $1 > 0$.

Demonstração:

Como $n \neq 0$, temos que n é do tipo $n = S(n1) = S(n1 + 0) = 0 + S(n1)$ ($n1 \in \mathbb{N}$), logo $n = 0 + p$, tal que $p = S(n1) \in \mathbb{N}^*$. Desse modo, mostramos que existe um $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = 0 + p$. Logo, $1 = 0 + 1 \rightarrow 1 > 0$.

Proposição 18. Lei da tricotomia. Para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, temos que apenas uma das relações seguintes ocorrem:

i) $m < n$;

ii) $m = n$;

iii) $m > n$.

Demonstração:

Podemos perceber, que, pela definição, os itens (i) e (ii), assim como (ii) e (iii) são incompatíveis, logo, se compararmos os itens (i) e (iii) teremos:

$$n = m + p \text{ e } m = n + p' \text{ com } p \text{ e } p' \neq 0, \text{ assim } n + 0 = n = (n + p') + p = n + (p' + p).$$

Ao cancelarmos n , iremos obter $p + p' = 0$, logo pela Proposição 9 temos que $p = p' = 0$, o que é uma contradição. Assim, concluímos que as três relações não podem ocorrer simultaneamente. Tomando-se $m \in \mathbb{N}$ arbitrário, e o conjunto $D = \{x \in \mathbb{N} | x = m \text{ ou } x > m \text{ ou } x < m\}$.

1. $0 \in D$, pois $0 = m$ ou $0 \neq m$ e pela Proposição 6, $m > 0$.

2. Tomando-se um $k \in D$, será provado que seu sucessor também pertence considerando as seguintes situações:

- a) $K = m$. Logo, temos que $k + 1 = m + 1$, de onde $k + 1 > m$, logo $S(k) \in D$.
- b) $K > m$. Existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $k = m + p$, logo $K = 1 = (m + p) + 1 = m + (p + 1)$, assim, $k + 1 > m$, logo $S(k) \in D$.
- c) $K < m$. Existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $m = k + p$, e, como p é diferente de zero, logo, p é do tipo $p = p' + 1 (p' \in \mathbb{N})$, assim, $m = k + (p' + 1) = k + (1 + p') = (k + 1) + p'$. Se $p' = 0$, então $m = k + 1$ e $S(k) \in D$. Se $p' \neq 0$, então $m > k + 1$ e $S(k) \in D$.

Assim, podemos concluir que $D = \mathbb{N}$.

Teorema 19. *Compatibilidade da relação de ordem com as operações em $\mathbb{N}$. Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$, valem as seguintes afirmações:*

i) $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$;

ii) $a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$.

Demonstração:

i) $a \leq b \iff$ existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $b = a + p$

$$b + c = (a + p) + c = a + (p + c) = a + (c + p) = (a + c) + p$$

De onde obtemos $b + c \geq a + c$

ii) $a \leq b \iff b = a + q \forall q \in \mathbb{N}$. Suponhamos que $bc < ac$. $bc = ac + p \forall p \in \mathbb{N}^*$. Substituindo a primeira igualdade na segunda, $ac = (a + q)c + p \Rightarrow ac = ac + qc + p \Rightarrow 0 = qc + p$

Pela proposição 9 $qc = p = 0$ sendo uma contradição, pois $p \in \mathbb{N}^*$. Logo, $ac \leq bc$

Teorema 20. *Lei do cancelamento da multiplicação. Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$, com $c \neq 0$, tais que $ac = bc$, então, $a = b$.*

Demonstração:

Pela Tricotomia, temos que $a < b$ ou $a > b$. Caso $a < b$, pelo teorema anterior, teríamos que $ac < bc$, o que contradiz $a = b$. Assim, temos da mesma forma que se $a > b$, $ac > bc$, contradizendo $a = b$, logo, podemos concluir que $a = b$.

Teorema 21. *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$. Então, $a < b$ se, e somente se, $a + 1 \leq b$.*

Demonstração:

$a < b \Rightarrow b = a + p \quad p \in \mathbb{N}, p \neq 0$. Para um $q \in \mathbb{N}$, $p = S(q) = q + 1$, assim,

$$b = a + p = a + (q + 1) = a + (1 + q) = (a + 1) + q \Rightarrow b \leq a + 1.$$

Sendo de forma imediata a recíproca.

Teorema 22. *Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ possui um menor elemento.*

Demonstração:

Seja S subconjunto de $\mathbb{N}$. Considerando o conjunto $M = \{n \in \mathbb{N} | n \leq x, \forall x \in S\}$. Temos que $0 \in M$. Como $S \neq \emptyset$, tomemos $s \in S$, Logo $s + 1$ não pertence a M , pois $s + 1$ não é menor ou igual a s , assim, $M \neq N$. Desse modo, pelo fato de que $0 \in M$ e $N \neq M$ deve existir $k \in M$ tal que $k + 1$ não pertence a M , caso contrário, pelo princípio de indução, $M = N$. Afirmamos que este k é o menor elemento de S , ou seja, $k = \min S$. Como $k \in M$, então, $k \leq x, \forall x \in S$. Nos resta apenas verificar se $k \in S$. Suponhamos que k não pertence a S , então, $k < x, \forall x \in S$. Pelo teorema anterior temos $k + 1 \leq x, \forall x \in S$, o que significaria que $k + 1 \in M$, contradizendo a escolha de k . Logo $k \in S$, como queríamos.

Proposição 23. *Se X , um subconjunto de $\mathbb{N}$ satisfazer os dois itens abaixo, temos que $\{a, a + 1, a + 2, \dots\} \subset X$:*

1. $a \in X$;
2. $n \in X \Rightarrow n + 1 \in X$.

Demonstração:

Se $m \in \mathbb{N}$, então $a + m \in X$, ou seja, $Y = \{m \in \mathbb{N} | a + m \in X\} = \mathbb{N}$. Consideremos Y dessa forma e apliquemos indução sobre ele:

1. $0 \in Y$ pois $a + 0 = a \in X$;
2. $k \in Y$ (suposição);

$k + 1 \in Y \rightarrow a + k \in X \rightarrow (a + k) + 1 \in X \rightarrow a + (k + 1) \in X$, o que significa que $k + 1 \in Y$. Logo $N = Y$.

Proposição 24. *Seja $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ a função sucessor. Para cada $n \geq 1$, tem-se $S^n(0) \neq S^k(0)$, para todo $k < n$.*

Demonstração:

Considere o conjunto $X = \{n \in \mathbb{N}^* | S^n(0) \neq S^k(0), \forall k < n\}$, utilizando a proposição anterior, temos:

- i) $1 \in X$, pois $S^1(0) = S(0) = 1 \neq 0 = S^0(0)$;
- ii) $n \in X$, isto é, $S^n(0) \neq S^k(0)$ para todo $k < n$.

Aplicando S em ambos os lados da desigualdade:

$$S^{n+1}(0) \neq S^{k+1}(0) = S^{n+1}(0) \neq S^1(0) \quad (\text{para todo } l \text{ de } 1 \text{ até } n)$$

Concluimos que, $S^{n+1}(0) \neq S^1(0)$ para todo $l < n + 1$, logo, $n + 1 \in X$ e assim, $X = \mathbb{N}^*$.

3 Considerações finais

Este trabalho teve como objetivo demonstrar a construção do Conjunto dos Números Naturais através dos Axiomas de Peano, uma vez que ele esteve presente em grande parte da história da humanidade. Isso se deu de modo que levando em consideração o número zero, e, admitindo o mesmo como um número natural, a partir dele obtemos os sucessores através de uma função injetora e chegamos à sequência de números que conhecemos, ou seja, zero, um, dois e assim por diante.

Referências

- FERREIRA, Jamil. **A construção dos Números**. 3. ed. Rio de Janeiro: Sbm, 2013. 116 p. Coleção Textos Universitários.
- DEPARIS, Dafne de Moraes. **Construção do corpo ordenado dos números reais**. 2009. Monografia (Licenciatura em Matemática)-Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, Pr.

Relato de experiências com a Modelagem Matemática em disciplina do ensino superior

Ana Cristina Dellabetta Guerrero
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
anacristinadellabetta@hotmail.com

Daniele Donel
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
danidonel@hotmail.com

Tiago Emanuel Klüber
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
tiagokluber@gmail.com

Resumo: O presente artigo relata algumas considerações feitas acerca das atividades propostas durante o segundo semestre do ano de 2017, na disciplina de Resolução de Problemas e Modelagem Matemática (RPMM), do Curso Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná campus de Cascavel. Visamos aqui, além de relatar, conciliar as atividades desenvolvidas no decorrer do semestre com as ideias apresentadas pelos autores dos textos lidos acerca da temática e, também, com as discussões realizadas e as sínteses apresentadas pelo docente da disciplina.

Palavras-chave: Tendências em Educação Matemática; Modelagem Matemática na Educação Matemática; Educação Matemática.

1 Introdução

O presente trabalho tem o intuito de relatar algumas análises realizadas acerca das atividades propostas no decorrer do segundo semestre de 2017, na disciplina de Resolução de Problemas e Modelagem Matemática (RPMM), do Curso Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná *campus* de Cascavel, ministrada pelo professor Dr. Tiago Emanuel Klüber. Visamos aqui, além de relatar, relacionar as experiências com os textos estudados ao longo do semestre, elencando também as situações trabalhadas em sala e as discussões realizadas acerca da Modelagem Matemática no decorrer da disciplina.

De maneira geral as aplicações não são comuns nas aulas de matemática, de tal modo que os exercícios apresentados aos alunos, costumam ser veiculados por meio de enunciados perfeitamente elaborados, os quais, em geral, escondem o problema real que deu origem ao exercício (CHEVALLARD, 2001, apud ALMEIDA e BRITO, 2005). Afinal, porque os estudantes se interessariam por algo que não tem nenhuma finalidade prática, sendo apenas um jogo para ser jogado em sala de aula?

Os parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) afirmam, quanto aos recursos didáticos e metodológicos, que não existe um caminho que possa ser identificado como único

e melhor para o ensino de matemática, bem como de outras disciplinas. No entanto, conhecer distintas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa a sua prática, principalmente para nós, graduandos de um curso de licenciatura.

Devido à necessidade de mudança na forma de ensinar a Matemática, a Modelagem Matemática na Educação Matemática ganhou espaço, pois a grande preocupação consistia em encontrar formas alternativas para o ensino de Matemática, as quais tivessem a preocupação de partir de situações vivenciadas pelo aluno, indo ao encontro da proposta da Modelagem Matemática que é, justamente, partir de situações vivenciadas pelos alunos (BURAK, 2004).

Nas aulas de RPMM, buscamos resolver ou criar, em grupos, situações-problema de temas variados, abordando diferentes conteúdos; após isso, fizemos socializações dos resultados obtidos em cada um dos grupos. Realizamos, também, a leitura de textos e concluímos com seminários, que esclareceram um pouco mais sobre esta Tendência. Diante do exposto, buscamos no presente trabalho, conciliar as atividades desenvolvidas no decorrer do semestre com as ideias apresentadas pelos autores dos textos lidos acerca de Modelagem Matemática e, também com as discussões realizadas e as sínteses apresentadas pelo professor da disciplina. Com o avançar das aulas e o desenvolvimento das atividades evoluímos nas compreensões em torno deste tema, conseqüentemente, a visão inicial que tínhamos, sofreu mudanças. Nas seções seguintes relatamos as aulas e nosso entendimento sobre o assunto, elencando algumas concepções de Modelagem na Educação Matemática e os principais argumentos para sua inserção em sala de aula.

2 Descrição das atividades

Na busca de proporcionar um ensino de Matemática mais relevante, surgem as Tendências em Educação Matemática, que estão previstas nas Diretrizes Curriculares para o Ensino de Matemática do Estado do Paraná (DCE) (PARANÁ, 2008). Acredita-se que uma proposta metodológica, fundamentada nas Tendências em Educação Matemática, possibilita uma melhor compreensão e torna a construção do conhecimento matemático mais significativo, sendo capaz de tornar a Matemática uma disciplina agradável, mais fácil de ser aprendida e de ser ensinada. Nesse sentido, a Modelagem Matemática, uma das Tendências em Educação Matemática, propõe uma forma de aprender e ensinar diferente das metodologias tradicionais.

Segundo Bassanezi (2002), a Modelagem Matemática consiste essencialmente na arte de transformar problemas da realidade e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real. Barbosa (2001, apud Sant'ana e Sant'ana, 2009), compreende por Modelagem Matemática um ambiente de aprendizagem no qual os estudantes são convidados a investigar, por meio da Matemática, situações com referência na realidade. Burak (1994) afirma que Modelagem Matemática é um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões. Existem diferentes concepções de Modelagem Matemática, apresentadas por pesquisadores. Segundo Burak (2004), a Modelagem encontrou várias formas de ser trabalhada em sala de aula, e essas formas diferentes de se conceber a

Modelagem Matemática refletem as experiências vividas pelos seus seguidores que, por sua vez proporcionam características e percepções diferentes na aplicação da Modelagem.

No decorrer do primeiro semestre de 2017, na disciplina de Resolução de Problemas e Modelagem Matemática, desenvolvemos diferentes atividades acerca do assunto Modelagem Matemática.

A primeira atividade, foi desenvolvida com os estudantes em grupos e partia do sucinto questionamento: “Qual é o público?”, trazendo uma breve fala, acompanhada de duas imagens de manifestações pró e contra o impeachment, no ano de 2016, da então presidente da República Federativa do Brasil, Dilma Vana Rousseff. Deveríamos buscar informações e apontar se havia mais pessoas nas manifestações pró ou nas manifestações contrárias ao impeachment. Os dados encontrados eram bastante contraditórios. As informações dos portais de notícias eram diferentes das dos organizadores, que também, eram distintos dos dados divulgados pela polícia, para ambos os manifestos. Quando se trata de lidar com estimativas, alguns meios de comunicação da mídia, ou mesmo os organizadores do evento, tendem a produzir uma interpretação sobre os números de uma multidão, para chamar mais atenção ao movimento. Pensamos então em analisar fotos dessas manifestações, mas estas eram de ângulos distintos, compreendiam apenas parte da avenida paulista, não sendo possível obter informações consistentes para estimar resultados, razoavelmente, próximos do número verdadeiro de manifestantes.

Nossa turma não se motivou muito com esse tema, talvez por ser algo que aconteceu no ano passado, não era um problema tão atual da sociedade, indo ao encontro do que afirma Burak (1994), citando que a motivação advém do interesse pelo assunto e que a duração de uma experiência envolvendo a Modelagem Matemática é variável. Depende do interesse pelo tema proposto, dos problemas levantados e das soluções encontradas e da própria motivação do grupo. Outro fator que pode ter colaborado para a desmotivação, é o estranhamento da natureza da atividade, pois, ainda não havíamos realizado atividades de Modelagem Matemática numa perspectiva de Educação Matemática, visto que perguntar e refletir acerca de perguntas leva educandos e professores ao abandono de uma comodidade que há no ensino tradicional, na qual o estudante aguarda passivamente seu professor comunicar o conteúdo e, ao final, sabe que será capaz de reproduzi-lo. A Modelagem modifica o contrato didático e deixa professores e alunos em uma “zona de risco”, em que cada questão pode desafiar, tanto estudantes quanto professores, suscitando ora respostas imediatas, ora novas perguntas, ou ainda investigações que podem ser mais longas e elaboradas (SANT’ANA; SANT’ANA, 2009).

O docente responsável pela disciplina conduziu todas as aulas de forma a não fornecer-nos respostas e informações, instigando-nos a buscá-las em diferentes fontes, inclusive, realizava novas indagações, fazendo-nos refletir sobre o que já havia sido feito. Assim, fazíamos novas reflexões e, por vezes, tínhamos algo mais a considerar. Dessa forma, fomos aprendendo a resolver problemas de modelagem, pois viemos de um ensino onde solucionamos problemas de forma mecânica e sem realizar muitas reflexões sobre a situação, desejando obter uma resposta. Quanto mais avançávamos na resolução, e quanto mais informações considerávamos, mais esta estava próxima da nossa realidade e era mais significativa para nós, causando uma sensação

diferente do que resolver um problema do livro didático.

Ao contrário da primeira atividade, a segunda nos motivou bastante. Nesta assistimos um vídeo, intitulado Carbono e vida, que falava sobre o carbono (CO_2) e a importância de sequestrar o carbono lançado na atmosfera, para motivar e contextualizar a atividade. Em seguida, recebemos uma reportagem que apresentava dados de emissão de CO_2 pela frota de ônibus circulares de São Paulo e, também, o quanto um parque como o Ibirapuera pode sequestrar por ano de CO_2 . A pergunta que deveria ser respondida era: *Se levarmos em consideração toda a frota municipal de veículos da cidade de Cascavel, qual seria a quantidade de árvores necessária para sequestrar o CO_2 emitido por eles?*

Nesta tarefa de Modelagem Matemática, o professor definiu o tema e a pergunta, após, conduziu as aulas de forma a orientar e problematizar, sempre acompanhando o avanço dos grupos. Foram necessárias mais aulas para a resolução desta atividade, em comparação com a primeira. Neste sentido, uma tarefa de modelagem dura o quanto os alunos ficarem interessado nela, a temática despertou nosso interesse, afinal, como cita Burak (2004):

[...] a Modelagem, como uma alternativa metodológica para o ensino de Matemática vem ao encontro das expectativas dos estudantes, pois procura favorecer a interação com o seu meio ambiente, uma vez que tem o ponto de partida no cotidiano do aluno. Quando o aluno vê sentido naquilo que estuda, em função da satisfação das suas necessidades e de seus interesses, da realização dos seus objetivos, não haverá desinteresse, pois trabalha com entusiasmo e perseverança. Esse interesse é importante, pois dá início à formação de atitudes positivas em relação à Matemática (BURAK, 2004, p. 10).

No desenvolvimento da tarefa, usamos as tecnologias para buscar dados, procuramos em diferentes fontes que julgávamos confiáveis, aferimos os dados da tarefa, fizemos escolhas e novos problemas, definimos hipóteses, criamos estratégias, repensamos a partir do resultado e, com tudo isso, estudamos conceitos de outras disciplinas, que sobre tudo, nos trouxeram conscientização quanto à conservação do meio ambiente. Burak (2004) aponta que a Modelagem Matemática é desenvolvida em cinco etapas: Escolha do tema; Pesquisa exploratória; Levantamento dos problemas; Resolução do(s) problema(s) e o desenvolvimento da Matemática relacionada ao tema e Análise crítica da(s) solução(ões).

A **escolha do tema** é a etapa onde o professor incentiva e oferece condições para que os alunos possam escolher o tema sobre o qual farão a pesquisa, este deve ser do interesse dos alunos ou de alguma situação do cotidiano. Na **pesquisa exploratória**, os alunos são orientados a procurar informações para embasarem a pesquisa. Esta etapa busca desenvolver a autonomia dos estudantes e um olhar mais atento para as situações pesquisadas. Na etapa de **levantamento dos problemas**, os estudantes apresentarão todas as informações colhidas na etapa anterior, para, em seguida, elaborarem, esquematizarem os problemas levantados e fazerem conjecturas sobre tudo que pode ter relação com a Matemática. Portanto, “essa fase da Modelagem é muito rica, pois desenvolve no aluno a capacidade de tomar decisões, de formular hipóteses, de questionar as várias possibilidades de resolução de um mesmo problema” (KLÜBER; BURAK, 2007, p. 3).

Na etapa de **resolução dos problemas e desenvolvimento do conteúdo ma-**

temático no contexto do tema deve-se despertar nos alunos as condições necessárias para resolverem os problemas levantados, com o auxílio dos conteúdos matemáticos. Assim, os conteúdos matemáticos passam a ter significado e, podem surgir modelos matemáticos. A etapa da **análise crítica da(s) solução(ões)** oferece ao aluno condições de refletir sobre os resultados obtidos no processo e sobre quais os benefícios que estes podem trazer para a melhoria da tomada de decisões e implementação de ações. Esta etapa “contribui para a formação de cidadãos participativos, mais autônomos e que auxiliem na transformação da comunidade em que participam” (KLÜBER; BURAK, 2007, p. 4). Essas etapas, desenvolvidas com os estudantes em grupos, incentivam a participação ativa do aluno nas discussões. Barbosa (2003) diz que a Modelagem pode potencializar a intervenção das pessoas nos debates e nas tomadas de decisões sociais que envolvem aplicações da matemática, o que me parece ser uma contribuição para alargar as possibilidades de construção e consolidação de sociedades mais democráticas.

Para uma terceira tarefa, ainda em grupos, deveríamos escolher algum tema que fosse de nosso interesse. Os temas escolhidos foram diversos, como: salário mínimo e cesta básica, aplicativo de celular (jogo de realidade aumentada), investimento destinado a educação e duplicação de uma rodovia e a pavimentação de concreto. Cada grupo, deveria elaborar um problema, de acordo com a temática escolhida por seus integrantes, e posteriormente, resolvê-lo.

O trabalho com a Modelagem Matemática parte de temas, propostos pelo grupo, ou por grupos constituídos por 3 ou 4 participantes. Nessa perspectiva, o ensino de Matemática torna-se dinâmico, mais vivo e, em consequência, mais significativo para o aluno e para o grupo. Contribui para tornar mais intensa, mais eficiente e mais eficaz a construção do conhecimento por parte de cada aluno participante do grupo, do próprio grupo ou dos grupos, sobre determinado conteúdo, a partir do conhecimento que cada aluno ou o grupo já possui sobre o assunto. Isso confere maior significado ao contexto, permitindo e favorecendo o estabelecimento de relações matemáticas, a compreensão e o significado dessas relações (BURAK, 2004, p. 3).

Os problemas elaborados, com base nos dados coletados, determinaram os conteúdos a serem trabalhados. Todos os grupos se envolveram com as atividades, buscamos considerar o maior número de hipóteses possível, buscando obter um resultado bem próximo da realidade. Após concluído, foram destinadas algumas aulas para a apresentação das conclusões desta atividade e nós pudemos realizar perguntas e/ou expor sugestões aos nossos colegas.

Durante a fase de discussão cabe ao professor estimular a comunicação entre os alunos. Ao organizar a fase de discussão coletiva o professor deve conhecer bem os trabalhos de todos os grupos de alunos de modo a valorizar tanto as descobertas mais interessantes como as mais modestas. Por vezes, pode ser útil o professor proporcionar um momento de discussão durante a realização da tarefa com o objetivo de ajudar os alunos a ultrapassar certas dificuldades, de motivá-los em fases mais críticas do trabalho, ou mesmo de enriquecer a investigação sobre a atividade a ser realizada. A discussão final sobre a atividade e conclusões dos alunos é também uma boa ocasião para promover a reflexão sobre o trabalho. (ALMEIDA, DIAS, 2004, p. 6).

Essa atividade, encaixa-se no Caso 3, descrito por Barbosa (2003) e que se trata de projetos desenvolvidos a partir de temas ‘não matemáticos’, que podem ser escolhidos pelo professor ou pelos alunos. O professor pode propor um tema para a turma, ou pedir que ela

própria escolha ou ainda pode convidar que os alunos, por grupos, para decidirem que assunto querem investigar.

Em outro momento, estudamos e apresentamos artigos que traziam problemas de modelagem, bem como, detalhes de sua aplicação em sala de aula e/ou resolução. Foi interessante, pois alguns dos textos tratavam de problemas cujas resoluções apresentavam conceitos ou conteúdos que vimos em disciplinas da graduação. Constatamos que esses conteúdos também podem ser abordados por meio da Modelagem Matemática. Isso mostra que há a possibilidade de, mesmo em conteúdos do Ensino Superior, ir além de abordagens meramente expositivas, o que poderia conferir mais significado, articulando conteúdo matemático e aplicações.

Outra atividade desenvolvida nas aulas, consistia de uma tabela que apresentava o salário mínimo nominal e o respectivo salário mínimo necessário apresentado pelo Departamento Inter-sindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos (DIEESE), nos últimos três anos. Deveríamos, em grupos, formular uma questão e a responder a partir dos dados dispostos na tabela. Essa atividade possuía os dados mais restritos, em relação às outras, pois deveríamos utilizar os dados entregues pelo professor, mas mesmo assim poderíamos buscar outros dados para complementar nossa tarefa. Nesse caso, a tarefa de Modelagem teve um caráter mais fechado, no entanto, abordamos praticamente uma unidade inteira de conteúdos do Ensino Médio, a estatística. Na socialização, observamos que as questões elaboradas por alguns grupos ficaram parecidas, possivelmente, pelos dados mais restritos não possibilitarem uma ampla abertura para outras discussões.

Geralmente quem dá o “ponta pé inicial” no processo de aprendizagem é o professor. No entanto, na Modelagem Matemática, isso muda, porque o processo é compartilhado com os alunos. Esse aspecto, acaba gerando maior interesse dos alunos, pois eles têm a oportunidade de discutir e propor; pode ensinar, também, uma maior interação dos estudantes com a aula, porque podem trabalhar com aquilo que gostam e que tem significado para eles; além de estabelecerem relações afetivas mais amistosas com os colegas e também com o professor (BURAK, 2004).

Conclusões

Com a utilização da Modelagem na Educação Matemática, como uma alternativa metodológica, o professor tem a oportunidade de transformar sua própria prática através da motivação dos alunos, alterando aspectos como, por exemplo, a participação e o interesse dos estudantes em aprenderem e crescerem cada vez mais e, principalmente, oportunizando e instigando-os a refletirem e criticarem acerca das atividades. Dessa forma, pode-se romper o pensamento de que a Matemática seja difícil ou que não possua utilidade, podendo o estudante sentir prazer em realizar tais tarefas.

A Modelagem Matemática é, portanto, uma metodologia alternativa que possibilitará aos alunos pesquisarem e buscarem a matemática em situações do cotidiano, tornando-os sujeitos participantes na construção do conhecimento. Como cita Burak (1994): “Alguns conteúdos, não contemplados no desenvolvimento da Modelagem, podem ser complementados com outro tema

[...]”, ou ainda, utilizando-se de outras tendências da Educação Matemática. Comprovando que conhecer distintas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa a sua prática, principalmente para nós, graduandos de um curso de licenciatura.

Conforme Barbosa (2004), as experiências de Modelagem podem influenciar os professores a desenvolver atividades dessa natureza ou próximas em sua sala de aula e, também, segundo ele, a forma como os professores veem Modelagem será determinada por suas experiências prévias. As atividades que desenvolvemos no decorrer do semestre, lançaram luzes quanto ao que é Modelagem Matemática e como pode ser trabalhada em sala de aula, bem como, as contribuições que um bom trabalho com essa tendência pode trazer para o professor e para o aluno, contribuindo significativamente para aprendizagem deste último e para a reorganização da prática do professor.

A partir da disciplina, por vivenciarmos e participarmos ativamente de tarefas de Modelagem e estudarmos a teoria, nós e nossos colegas, quando professores em sala de aula, poderemos nos sentir mais seguros para trabalhar com Modelagem na Educação Matemática. Ainda, compreendemos a importância de uma formação continuada, pois, segundo Almeida e Dias (2004), a forma como o professor encarra o processo de ensino e aprendizagem e o modo como o conhecimento é veiculado, interfere diretamente na formação do aluno. Segundo Burak (1994), no professor reside, ainda, a esperança de dias melhores para a educação.

A socialização também é uma etapa muito importante em uma aula desta natureza. O professor precisa estar atento para valorizar todas as resoluções, desde as mais simples até as mais sofisticadas, incentivando assim, seus alunos, a se dedicarem cada vez mais em tarefas de Modelagem Matemática. O fato de nos reunirmos em grupos para desenvolvermos as atividades, foi bem valioso, pois, nos grupos conseguíamos debater com os colegas e escolher as variáveis de maior importância. Além de aprender de maneira mais significativa os conteúdos que explicávamos aos colegas do grupo, pois, aprendemos muito melhor quando queremos ensinar algo a alguém.

É importante pontuar que o professor passa a acompanhar este processo, criando as condições certas para o estudante ser o protagonista da construção de seus conhecimentos a partir das atividades propostas, assim, numa colaboração mútua, professor e aluno dinamizam as aulas, tornando-as mais significativas e motivadoras, criando um ambiente de cooperação, de busca, de exploração e descoberta, esclarecendo que o mais importante ao resolver um problema é o processo e não o tempo gasto para resolvê-lo ou a resposta final. Cabe ao docente esforçar-se e buscar aprimorar sua prática, com o tempo, vai adquirindo experiência e elaborar e trabalhar aulas diferentes das tradicionais passa a ser mais “fácil”, vimos que é um esforço que recompensa.

Acreditamos que é preciso inserir mais tarefas de Modelagem na Educação Matemática em nossas escolas, pois mesmo prevista e amparada pela Lei, é pouco utilizada nas escolas. Segundo Barbosa (2003), a capacidade de compreender e criticar argumentos matemáticos postos nos debates locais ou gerais pode potencializar a intervenção das pessoas nas tomadas de decisões coletivas. Portanto, defendemos o uso da Modelagem, visto que, precisamos formar cidadãos críticos, capazes de interpretar argumentos matemáticos usados na sociedade, não devemos

apenas aceitar a matemática como exata e verdadeira, até porque, em muitos casos da sociedade, a matemática é usada para mascarar a verdade.

Referências

- ALMEIDA, Lourdes M. W; BRITO, Dirceu S. Atividades de Modelagem Matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir? **Ciência & Educação**, v. 11, n. 3, p. 483-498, 2005.
- ALMEIDA, Lourdes M. W.; DIAS, Michele R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema**, v. 17, n. 22, p. 19-35, 2004.
- BARBOSA, Jonei C. As Relações dos Professores com a Modelagem Matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais...** Recife: Saraiva, 2004. v. 1, p. 1 - 11. CD-ROM.
- BARBOSA, Jonei C. Modelagem Matemática e a Perspectiva Sócio-crítica. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 2003, Santos. **Anais...** Santos, 2003. v. 1, p. 1 - 13.
- BASSANEZI, Rodney C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2002, 389p.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** (5ª a 8ª séries). Brasília: MEC/SEF, 1998.
- BURAK, Dionísio. Critérios Norteadores para a adoção da Modelagem Matemática no Ensino Fundamental e Secundário. **Zetetike** (UNICAMP), v. 2, n.2, p. 47 - 60, 1994.
- BURAK, Dionísio. Modelagem Matemática e a Sala de Aula. In: ENCONTRO PARANAENSE DA MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 2004, Londrina. **Anais...** Londrina: UEL, 2004. v. 1, p. 1 - 10.
- KLÜBER, Tiago E.; BURAK, Dionísio. Concepções de modelagem matemática: contribuições teóricas. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo. v. 10, n. 1, p. 17 - 34, 2008.
- PARANÁ. Secretaria do Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares da Rede Pública da Educação Básica do Estado do Paraná - Matemática**. Curitiba: SEED, 2008.
- SANT'ANA, Alvino A.; SANT'ANA, Marilaine F. Uma Experiência com a Elaboração de Perguntas em Modelagem Matemática. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2009, Londrina. **Anais...** Londrina: UEL, 2009. v. 1, p. 1 - 13.

Estudo de matrizes e formas quadráticas

Laura Massuda Crema¹

Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Câmpus Cascavel
laura.crema@unioeste.br

Fabiana Magda Garcia Papani

Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Câmpus Cascavel
fgarciapapani@gmail.com

Resumo: O conceito de formas quadráticas aparece em vários problemas matemáticos e possui diversas aplicações, além de grande importância dentro da Álgebra Linear. Neste trabalho apresentamos resultados da iniciação científica desenvolvida pela discente no que tange a utilização das formas quadráticas na demonstração de resultados relacionados a classificação de pontos críticos de funções.

Palavras-chave: positividade de matrizes; teorema espectral; pontos críticos.

Introdução

Classificar os pontos críticos de funções de uma ou várias variáveis (pontos críticos são os pontos de máximo, mínimo ou de sela (inflexão) de uma função), é um problema com aplicações práticas em diversos campos da ciência. Veremos neste trabalho que a classificação desses pontos críticos está diretamente ligada a positividade da matriz Hessiana. Por sua vez, a positividade de uma matriz qualquer está relacionada ao sinal da forma quadrática relacionada a essa matriz. Por este, e por vários outros motivos, o estudo de formas quadráticas possui grande importância na Álgebra Linear. Apresentaremos neste trabalho uma definição de formas quadráticas bem como diversos resultados relacionados a estas que permitem estabelecer as relações acima mencionadas.

Ressaltamos que as definições e resultados aqui apresentados são primordiais no estudo de formas quadráticas e foram construídos com auxílio de diversos livros de Álgebra Linear e/ou Cálculo de Várias Variáveis, tais como os apresentados na bibliografia. Para resultados referentes à matrizes e formas quadráticas, foram consultados Boldrini et al.(1980), Hefez e Fernandez (2016), Lima (2006), Lipschutz (1994) e Teixeira (2012). Os resultados referentes à positividade de formas quadráticas e classificação de pontos críticos foram obtidos através de Blume e Simon (1994) e Bortolossi (2002).

1 Matrizes e propriedades

Nesta seção apresentaremos diversas definições e teoremas relacionados ao estudo de matrizes.

¹Bolsista do programa de Iniciação Científica e Mestrado - PICME-CNPq/CAPES.

Definição 1 (Matriz ortogonal). Uma matriz P é dita **ortogonal** se cumpre a propriedade $PP^T = I$, ou seja, se sua matriz inversa coincide com sua matriz transposta.

Definição 2 (Conjunto ortonormal). Um conjunto de vetores é chamado **conjunto ortonormal** se todos os vetores no conjunto são mutuamente ortogonais e de comprimento unitário.

Teorema 3. A matriz A de ordem n é ortogonal se, e somente se, suas colunas formam um conjunto ortonormal.

Prova. Então

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{bmatrix} x_1^T \\ x_2^T \\ \vdots \\ x_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^T x_1 & x_1^T x_2 & \cdots & x_1^T x_n \\ x_2^T x_1 & x_2^T x_2 & \cdots & x_2^T x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^T x_1 & x_n^T x_2 & \cdots & x_n^T x_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Aqui, a notação $\langle x_1, x_2 \rangle$ representa o produto interno usual entre dois vetores no $\mathbb{R}^n$.

Deste modo, se as colunas de A formam um conjunto de vetores ortonormais, temos que, $\langle x_i, x_j \rangle = 0$, $\forall i \neq j$, e $\langle x_i, x_i \rangle = 1$, $\forall i = 1, \dots, n$. Portanto, $A^T A = I$ e A é uma matriz ortogonal. Por outro lado se A é ortogonal, $A^T A = I$, de onde segue que $\langle x_i, x_j \rangle = 0$, $\forall i \neq j$, e $\langle x_i, x_i \rangle = 1$, $\forall i = 1, \dots, n$ e portanto as colunas de A formam um conjunto ortonormal. $\square$

Definição 4 (Autovalor). Dada uma matriz quadrada A , $n \times n$. Chamamos um número λ de **autovalor** de A se existe um vetor v não nulo (chamado **autovetor**) tal que $Av = \lambda v$. Isto é, um autovalor é uma raiz do chamado polinômio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I)$.

Teorema 5. Se A é uma matriz real simétrica, então seus autovalores são reais.

Prova. Seja A a matriz simétrica e λ um autovalor de A , com respectivo autovetor x . Então, $Ax = \lambda x$, e tomando os conjugados complexos, $\overline{Ax} = \overline{\lambda x}$.

Como A é uma matriz real,

$$A\overline{x} = \overline{Ax} = \overline{\lambda x} = \overline{\lambda} \overline{x} = \overline{\lambda} \overline{x}.$$

Agora, temos que

$$\lambda(\overline{x}^T x) = \overline{x}^T (\lambda x) = \overline{x}^T (Ax) = (\overline{x}^T A)x = (A\overline{x})^T x = (\overline{\lambda} \overline{x})^T x = \overline{\lambda}(\overline{x}^T x).$$

Assim,

$$(\lambda - \overline{\lambda})(\overline{x}^T x) = 0.$$

Sabendo que $x \neq 0$; $\overline{x}^T x \neq 0$, temos que $\lambda = \overline{\lambda}$ e portanto, λ é real. $\square$

Teorema 6. *Se A é uma matriz real simétrica, então dois autovetores quaisquer, associados a autovalores distintos, de A são ortogonais.*

Prova. Sejam λ_1 e λ_2 autovalores de A , com $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e x_1, x_2 os autovetores associados a λ_1 e λ_2 , respectivamente, de modo que $Ax_1 = \lambda_1 x_1$ e $Ax_2 = \lambda_2 x_2$.

Sendo A simétrica, $A = A^\top$. Também temos que o produto interno entre dois vetores pode ser escrito como $\langle x_1, x_2 \rangle = x_1^\top x_2$.

Assim,

$$\begin{aligned} \lambda_1 \langle x_1, x_2 \rangle &= \langle \lambda_1 x_1, x_2 \rangle = \langle Ax_1, x_2 \rangle = (Ax_1)^\top x_2 \\ &= (x_1^\top A^\top) x_2 = (x_1^\top A) x_2 = x_1^\top (Ax_2) = x_1^\top (\lambda_2 x_2) \\ &= \lambda_2 (x_1^\top x_2) = \lambda_2 \langle x_1, x_2 \rangle \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \langle x_1, x_2 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$ e x_1 e x_2 são ortogonais. $\square$

Teorema 7 (Teorema Espectral). *Seja A uma matriz simétrica $n \times n$. Então existe uma matriz P ortogonal, $n \times n$, tal que*

$$A = PDP^\top$$

onde D é a matriz diagonal, cuja diagonal é formada pelos autovalores de A .

Prova. Seja A uma matriz simétrica $n \times n$ e λ_i um autovalor de A . Assim, $A \cdot x_i = \lambda_i \cdot x_i$, com x_i sendo o autovetor associado a λ_i . Sabendo que estes autovetores são ortogonais entre si, e assumindo que esses autovetores também possuem comprimento 1 (se necessário, podemos torná-los de comprimento 1), reunimos estes autovalores e autovetores e reescrevemos:

$$A \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Chamando de P a matriz dos autovetores e D a matriz dos autovalores:

$$AP = PD.$$

Multiplicando ambos os membros por $P^\top$:

$$APP^\top = PDP^\top.$$

Sabemos que se as colunas de uma matriz quadrada formam um conjunto ortonormal, ela é ortogonal. Como as colunas de P são vetores ortonormais, P é ortogonal, logo, $PP^\top = I$. Assim, temos

$$A = PDP^\top$$

com P sendo uma matriz ortogonal e D a matriz diagonal formada pelos autovalores. $\square$

Proposição 8. *Se A é uma matriz não-singular (invertível), o vetor nulo, 0 , é o único vetor que satisfaz a equação $Ax = 0$.*

Prova. Seja A uma matriz invertível, existe A^{-1} tal que $AA^{-1} = I$. Sendo x um vetor tal que $Ax = 0$. Temos que:

$$x = Ix = (A^{-1}A)x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}0 = 0.$$

Assim, $x = 0$. □

Proposição 9. *Seja A uma matriz simétrica invertível. A matriz inversa de A pode ser diagonalizada, isto é, existem matrizes D e P , D diagonal e P invertível tais que $P^{-1}A^{-1}P = D$.*

Prova. Do Teorema Espectral, a matriz A pode ser expressa por $A = PDP^T$, com P ortogonal e D a matriz diagonal dos autovalores de A . Note que, como A é invertível, $\det A \neq 0$, e como o determinante do produto é o produto dos determinantes, $\det D \neq 0 \Rightarrow \lambda_i \neq 0$. Assim, a matriz D é invertível, e mais, sua inversa é uma matriz diagonal cujas entradas não-nulas equivalem à $\frac{1}{\lambda_i}$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$.

Assim,

$$A^{-1} = (PDP^T)^{-1} = (P^T)^{-1}D^{-1}P^{-1}.$$

Mas como P é ortogonal, sua inversa e sua transposta coincidem. Portanto,

$$A^{-1} = PD^{-1}P^T$$

de modo que A^{-1} é diagonalizável. □

Teorema 10 (Polinômio de Taylor de ordem 2). *Considere uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 e $\mathbf{p}$ um ponto do interior de D . Então existe um único polinômio p_2 de grau 2 de n variáveis que satisfaz as condições $p_2(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p})$, $Df(\mathbf{p}) = Dp_2(\mathbf{p})$ e $D^2f(\mathbf{p}) = D^2p_2(\mathbf{p})$:*

$$p_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}) + Df(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p})^T \cdot D^2f(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p})$$

Em que $Df(\mathbf{p})$ é matriz Jacobiana, formada pelas derivadas de primeira ordem de f no ponto $\mathbf{p}$, e $D^2f(\mathbf{p})$ a matriz Hessiana, formada pelas derivadas de segunda ordem de f no ponto $\mathbf{p}$.

Vale que

$$f(\mathbf{x}) = p_2(\mathbf{x}) + R_2(\mathbf{p}, \mathbf{x})$$

onde o erro $R_2(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ satisfaz a propriedade

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} \frac{R_2(\mathbf{p}, \mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|^2} = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} \frac{f(\mathbf{x}) - p_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|^2} = 0.$$

Isto é, o erro $R_2(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ vai para zero mais rapidamente que o quadrado da distância entre $\mathbf{p}$ e $\mathbf{x}$.

2 Formas Quadráticas

Nesta seção, introduzimos o conceito de formas quadráticas, bem como diversos resultados relacionados às formas quadráticas importantes para a nossa aplicação, isto é, importantes para relacionar as formas quadráticas com a positividade de matrizes e consequentemente com a classificação de pontos críticos.

2.1 Formas Quadráticas como polinômios

Definição 11 (Polinômio Homogêneo de grau n). Um polinômio de várias variáveis é chamado polinômio homogêneo de grau n quando cada um de seus termos possui grau total n .

Definição 12 (Forma Quadrática de n variáveis). Uma forma quadrática Q é uma função polinomial homogênea de grau 2. Sendo $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$,

$$\begin{aligned} Q &: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow Q(x) = \sum_{i,j}^n a_{ij}x_i x_j \end{aligned}$$

Escrevendo na forma matricial temos,

$$\begin{aligned} Q &: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow Q(x) = x^\top A x \end{aligned}$$

em que $A = (a_{ij})_{n \times n}$.

2.2 Positividade das Formas Quadráticas

Definição 13 (Positividade das formas quadráticas). Seja A uma matriz $n \times n$ e $Q(x) = x^\top A x$ a forma quadrática associada, dizemos que:

- A matriz A é positiva definida se $Q(x) > 0, \forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$.
- A matriz A é positiva semidefinida se $Q(x) \geq 0, \forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$.
- A matriz A é negativa definida se $Q(x) < 0, \forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$.
- A matriz A é negativa semidefinida se $Q(x) \leq 0, \forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$.
- A matriz A é indefinida se existem x e k em $\mathbb{R}^n$ tais que $Q(x) > 0$ e $Q(k) < 0$

Proposição 14. *Seja A uma matriz positiva (negativa) definida. Então A é inversível.*

Prova. Suponha que A é uma matriz não inversível, isto é, singular. Assim, existe um vetor não nulo x tal que $Ax = 0$. Mas então,

$$x^\top A x = x^\top 0 = 0.$$

E não pode ser uma matriz definida (positiva ou negativa). Logo, A é inversível (não-singular).

□

Proposição 15. *Supondo que A é uma matriz simétrica e Q é uma matriz inversível, então $Q^T A Q$ é uma matriz simétrica e A é positiva (negativa) definida se, e só se, $Q^T A Q$ é positiva (negativa) definida.*

Prova. Mostramos inicialmente que $Q^T A Q$ é simétrica.

$$(Q^T A Q)^T = Q^T A^T (Q^T)^T = Q^T A Q.$$

Como $Q^T A Q = (Q^T A Q)^T$, esta matriz é simétrica.

Agora, sem perda de generalidade, supomos que $Q^T A Q$ é positiva definida a fim de provar que A é positiva definida. Como Q é inversível, existem vetores não-nulos x, y tais que $x = Qy$. Assim,

$$x^T A x = (Qy)^T A (Qy) = (y^T Q^T) A (Qy) = y^T (Q^T A Q) y.$$

□

Proposição 16. *Toda forma quadrática está associada a uma matriz simétrica.*

Prova. Tomando $x^T A x$ uma forma quadrática, com A qualquer, temos

$$x^T A x = (x^T A x)^T = x^T A^T x.$$

Logo,

$$x^T A x = \frac{x^T A x + x^T A^T x}{2} = x^T \left(\frac{A + A^T}{2} \right) x.$$

Mas $A' = \frac{A + A^T}{2}$ é simétrica. De fato,

$$(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T.$$

Portanto

$$Q(x) = x^T A x = x^T A' x$$

com A' simétrica.

□

Proposição 17. *Toda forma quadrática pode ser diagonalizável.*

Prova. Seja $x^T A x$ uma forma quadrática, com A simétrica. Pelo Teorema Espectral, podemos reescrever $A = P^T D P$, onde P é uma matriz ortogonal e D é a matriz diagonal dos autovalores de A . Logo, $x^T A x = x^T (P^T D P) x = x^T A x = (x^T P^T) D (P x) = x^T A x = y^T D y$. De modo que diagonalizamos a forma quadrática.

□

Apresentaremos a seguir dois Teoremas. O Teorema 19 relaciona a positividade da forma quadrática de uma matriz com os menores principais líderes desta matriz. O Teorema 20 tem como objetivo relacionar as matrizes positivas (semi)definidas, negativas (semi)definidas ou indefinidas com os autovalores da matriz.

Definição 18 (Menor principal líder). Seja A uma matriz $n \times n$. O **menor principal líder** de ordem k de uma matriz $n \times n$ é o determinante de uma submatriz $k \times k$ de A obtida removendo-se as últimas $n - k$ linhas e as últimas $n - k$ colunas da matriz A .

Teorema 19. *Seja A uma matriz $n \times n$ simétrica, podemos classificá-la por meio do estudo dos menores principais líderes. Sendo assim,*

- *Se todos os menores principais líderes são maiores que zero então A é positiva definida;*
- *Se todos os menores principais líderes de ordem ímpar são menores do que zero e todos os menores principais líderes de ordem par são maiores que zero então A é negativa definida;*
- *Se todos os menores principais são maiores ou iguais a zero então A é positiva semidefinida;*
- *Se todos os menores principais de ordem ímpar são menores ou iguais a zero e todos os menores principais líderes de ordem par são maiores ou iguais a zero então A é negativa semidefinida;*
- *Se os menores principais líderes não se enquadram em nenhum dos casos anteriores então A é indefinida.*

Prova. Seja A um matriz simétrica $n \times n$ qualquer.

- Começamos com a seguinte afirmação: Se todos os menores principais líderes são maiores que zero então A é positiva definida.

Sabendo que a afirmação é válida para matrizes 1×1 , supomos que é válido para uma matriz $n \times n$ e assim, provaremos para sua validade para uma matriz $(n + 1) \times (n + 1)$. Tomemos então uma matriz $(n + 1) \times (n + 1)$ simétrica A , chamado de A_j cada uma das $j \times j$ submatrizes principais de A . Particionamos A do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} A_n & \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^\top & a_{(n+1)(n+1)} \end{bmatrix}.$$

Assumindo que todos os menores principais líderes de A são positivos, a submatriz A_n é positiva definida, pela hipótese indutiva. Assim, A_n é inversível. Assim, tomamos $d = a_{(n+1)(n+1)} - \mathbf{a}^\top (A_n)^{-1} \mathbf{a}$, I_n a matriz identidade $n \times n$, 0_n a matriz coluna $n \times 1$ nula e $\mathbf{a}$ a matriz coluna $(a_{1(n+1)}, a_{2(n+1)}, \dots, a_{n(n+1)})^\top$. Reescrevemos A como,

$$A = \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ (A_n^{-1} \mathbf{a})^\top & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_n & 0_n \\ 0_n^\top & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_n & A_n^{-1} \mathbf{a} \\ 0_n^\top & 1 \end{bmatrix} \equiv Q^\top B Q.$$

Temos que $\det Q = \det Q^\top = 1$ e $\det B = d \cdot \det A_n$, logo, $\det A = d \cdot \det A_n$. Como os menores principais líderes são todos positivos, $\det A > 0$ e $\det A_n > 0$, logo, $d > 0$. Calculando a forma quadrática de B , tomamos um vetor, $(n + 1) \times 1$, $Y^\top = (X^\top, x_{n+1})$, em que X é um vetor $n \times 1$. Assim:

$$Y^\top B Y = \begin{bmatrix} X^\top & x_{n+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_n & 0_n \\ 0_n^\top & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = X^\top A_n X + dx_{n+1}^2.$$

Como A_n é positiva definida e $d > 0$, a expressão é estritamente positiva e assim, B é positiva definida. Como $B = Q^T A Q$, A é positiva definida.

- Agora, vamos para o caso onde os menores principais líderes de ordem ímpar são menores do que zero e os menores principais líderes de ordem par são maiores (queremos concluir que A é negativa definida).

Essa demonstração deriva do item anterior. Tomemos A uma matriz simétrica $n \times n$, cujos menores principais líderes se encaixam na situação acima, e consideremos A_j as submatrizes principais $j \times j$ de A .

Sabemos que, dada qualquer matriz $A_j(j \times j)$, temos $\det(-A_j) = (-1)^j \det A$. Assim, calculando os menores principais líderes de todas as submatrizes de A , com j variando de 1 à n , teremos que todos os menores principais líderes serão positivos. Assim, como visto acima, $-A$ será positiva definida.

Logo, sua forma quadrática será $X^T(-A)X > 0$. Desse modo, é equivalente dizer que $X^T A X < 0$ e portanto, A é negativa definida.

- Para os casos de matriz positiva semidefinida e negativa semidefinida, o raciocínio é análogo, desta vez, considerando todos os menores principais.
- Se os menores principais não se enquadram em nenhum dos casos, não conseguimos determinar a positividade da forma quadrática.

□

Teorema 20. *Seja A uma matriz real simétrica:*

- *Se todos os autovalores de A são positivos então A é positiva definida;*
- *Se todos os autovalores de A são negativos então A é negativa definida;*
- *Se todos os autovalores de A são maiores ou iguais a zero então A é positiva semidefinida;*
- *Se todos os autovalores de A são menores ou iguais a zero então A é negativa semidefinida;*
- *Se existe ao menos um autovalor positivo e um autovalor negativo então A é indefinida.*

Prova. Seja A uma matriz real simétrica, Pelo Teorema Espectral, podemos reescrever A como $A = P D P^T$, com os elementos da matriz diagonal sendo os autovalores de A :

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Assim, a forma quadrática de A , $Q(h) = h^T A h$, pode ser reescrita como

$$Q(h) = h^T (P D P^T) h.$$

$$Q(h) = (h^\top P)D(P^\top h).$$

Chamando $x = (P^\top h)$, por propriedades de matriz, $(h^\top P) = x^\top$. Daí, temos:

$$Q(h) = x^\top D x = Q(x).$$

Assim, a positividade da matriz A é a mesma positividade da matriz diagonal D , caso muito mais simples. Assim:

- Sendo todos os autovalores positivos, temos a matriz D com $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$. A forma quadrática desta matriz é dada por:

$$Q(h) = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = h_1^2 \lambda_1 + h_2^2 \lambda_2 + \cdots + h_n^2 \lambda_n$$

onde temos que qualquer que seja h_k^2 , sempre será positivo e como os autovalores são positivos, teremos uma soma de números positivos e assim, $Q(h) > 0$ e a matriz é positiva definida.

- Analogamente, sendo todos os autovalores negativos, teremos a matriz D com $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n < 0$. A forma quadrática desta matriz é dada por:

$$Q(h) = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = h_1^2 \lambda_1 + h_2^2 \lambda_2 + \cdots + h_n^2 \lambda_n$$

onde qualquer que seja h_k^2 , sempre será positivo e como os autovalores são negativos, teremos uma soma de números negativos e assim, $Q(h) < 0$ e a matriz é negativa definida.

- Neste caso, tomamos os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$. Assim, a forma quadrática da matriz D é dada por:

$$Q(h) = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = h_1^2 \lambda_1 + h_2^2 \lambda_2 + \cdots + h_n^2 \lambda_n$$

temos que qualquer que seja h_k^2 , sempre será positivo e como os autovalores são maiores ou iguais à zero, teremos que $Q(h) \geq 0$ e a matriz é positiva semidefinida.

- Agora, tomamos os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \leq 0$. A forma quadrática da matriz D é dada por:

$$Q(h) = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = h_1^2 \lambda_1 + h_2^2 \lambda_2 + \cdots + h_n^2 \lambda_n$$

onde qualquer que seja h_k^2 , será positivo. Sendo os autovalores menores ou iguais à zero, teremos que $Q(h) \leq 0$ e a matriz é negativa semidefinida.

- Agora, tomando ao menos um autovalor positivo e um autovalor negativo, teremos uma matriz cuja forma quadrática é:

$$Q(h) = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = h_1^2 \lambda_1 + h_2^2 \lambda_2 + \cdots + h_n^2 \lambda_n$$

onde qualquer $h_k^2 > 0$. Neste caso, a positividade da matriz não pode ser definida observando o sinal dos autovalores.

□

3 Aplicações

3.1 Relação entre formas quadráticas e pontos críticos

Nesta seção, apresentamos o teorema que relaciona a positividade da forma quadrática relacionada à matriz Hessiana em um ponto crítico da função com a classificação deste ponto.

Definição 21 (Matriz Hessiana). Seja uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Chamamos **matriz Hessiana** de f num ponto $\mathbf{p}$ a matriz simétrica² formada pelas derivadas de segunda ordem de f no ponto $\mathbf{p}$.

Teorema 22. Considere uma função f e $\mathbf{p}$ um ponto crítico de f . Se a matriz Hessiana no ponto $\mathbf{p}$ é

- *positiva definida*, $\mathbf{p}$ é um ponto de *mínimo local* de f ;
- *negativa definida*, $\mathbf{p}$ é um ponto de *máximo local* de f ;

²A igualdade das derivadas mistas é garantida pelo Teorema de Schwarz.

- *indefinida, $\mathbf{p}$ é um ponto de sela de f ;*
- *positiva semidefinida ou negativa semidefinida, não conseguimos definir a situação.*

Prova. Para isso, vamos nos valer da aproximação oferecida pelo polinômio de Taylor de segunda ordem. Considerando a função $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 e um ponto qualquer $\mathbf{p} \in D$, temos

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}) + Df(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p})^\top \cdot D^2 f(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) + R_2(\mathbf{p}, \mathbf{x}).$$

Como neste caso $\mathbf{p}$ é um ponto crítico de f , então $Df(\mathbf{p}) = 0$ e assim,

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}) + \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p})^\top \cdot D^2 f(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) + R_2(\mathbf{p}, \mathbf{x}).$$

Considerando que o erro $R_2(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ é pequeno e tende à zero, e utilizando a variável $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{p}$, que representa o deslocamento em relação ao ponto $\mathbf{p}$, concluímos:

$$f(\mathbf{p} + \mathbf{h}) \approx f(\mathbf{p}) + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{h}^\top \cdot D^2 f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h}.$$

$$f(\mathbf{p} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{p}) \approx \frac{1}{2} \cdot \mathbf{h}^\top \cdot D^2 f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h}.$$

Observemos que o lado direito da expressão corresponde à forma quadrática da matriz Hessiana de f no ponto $\mathbf{p}$. Assim, se:

- $D^2 f(\mathbf{p})$ é positiva definida, então $\frac{1}{2} \cdot \mathbf{h}^\top \cdot D^2 f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h} > 0$ para todo $\mathbf{h} \neq 0$. Assim, também $f(\mathbf{p} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{p}) > 0$, ou ainda,

$$f(\mathbf{p} + \mathbf{h}) > f(\mathbf{p})$$

para todo $\mathbf{h} \neq 0$. Desta maneira, $\mathbf{p}$ é um ponto de mínimo local de f .

- $D^2 f(\mathbf{p})$ é negativa definida, então $\frac{1}{2} \cdot \mathbf{h}^\top \cdot D^2 f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h} < 0$ para todo $\mathbf{h} \neq 0$. Assim, também $f(\mathbf{p} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{p}) < 0$, ou ainda,

$$f(\mathbf{p} + \mathbf{h}) < f(\mathbf{p})$$

para todo $\mathbf{h} \neq 0$. Desta maneira, $\mathbf{p}$ é um ponto de máximo local de f .

- $D^2 f(\mathbf{p})$ é indefinida, podemos assumir duas variáveis distintas $\mathbf{h}$ e $\mathbf{k}$, de modo que a forma quadrática tenha sinal distinto, isto é, podemos obter a seguinte situação:

$$\frac{1}{2} \cdot \mathbf{h}^\top \cdot D^2 f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} \cdot \mathbf{k}^\top \cdot D^2 f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{k} < 0$$

Assim, também $f(\mathbf{p} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{p}) > 0$ e $f(\mathbf{p} + \mathbf{k}) - f(\mathbf{p}) < 0$, ou ainda,

$$f(\mathbf{p} + \mathbf{h}) > f(\mathbf{p}) \quad \text{e} \quad f(\mathbf{p} + \mathbf{k}) < f(\mathbf{p})$$

Então há pontos onde a função assume valores maiores que $f(\mathbf{p})$ e pontos onde a função assume valores menores que $f(\mathbf{p})$, logo, $\mathbf{p}$ é um ponto de sela de f .

- $D^2f(\mathbf{p})$ é positiva semidefinida, então $\frac{1}{2} \cdot \mathbf{h}^\top \cdot D^2f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h} \geq 0$ para todo $\mathbf{h} \neq 0$. Assim, também $f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{p}) \geq 0$, ou ainda,

$$f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) \geq f(\mathbf{p})$$

para todo $\mathbf{h} \neq 0$.

Caso $D^2f(\mathbf{p})$ seja negativa semidefinida, então $\frac{1}{2} \cdot \mathbf{h}^\top \cdot D^2f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h} \leq 0$ para todo $\mathbf{h} \neq 0$. Assim, também $f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{p}) \leq 0$, ou ainda,

$$f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) \leq f(\mathbf{p})$$

para todo $\mathbf{h} \neq 0$. Em ambos os casos, não temos como classificar o ponto $\mathbf{p}$.

□

Conclusões

Neste trabalho apresenta-se com detalhes resultados a respeito de formas quadráticas muito úteis, por exemplo, na classificação de pontos críticos de funções de várias variáveis, um problema com diversas aplicações práticas. Durante este estudo, foi possível perceber a relação entre conceitos da Álgebra Linear e do Cálculo Diferencial de funções de várias variáveis, que muitas vezes não são abordados com profundidade nas grades curriculares dos cursos de Licenciatura em Matemática.

Bibliografia

- BLUME, Lawrence; SIMON, Carl P.. Mathematics for Economists. New York: W.W. Norton, 1994.
- BOLDRINI, José Luiz et al. Álgebra Linear. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1980.
- BORTOLOSSI, Humberto José. Cálculo Diferencial a Várias Variáveis: Uma introdução à Teoria de Otimização. São Paulo: Edições Loyola, 2002.
- HEFEZ, Abramo; FERNANDEZ, Cecília S.. Introdução à Álgebra Linear. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.
- LIMA, Elon L. Geometria Analítica e Álgebra Linear. 2 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.
- LIPSCHUTZ, Seymour. Álgebra Linear. Makron Books, 1994.
- MARONEZE, André O. Máximos e Mínimos em Funções de Várias Variáveis: Uma Aplicação da Fórmula de Taylor, com Análise de Autovalores da Matriz Hessiana. Disponível em: <<https://www.ime.unicamp.br/~marcio/ss2003/Andre2.pdf>>. Acesso em: 5 out. 2018.
- TEIXEIRA, Ralph C. Álgebra Linear: exercícios e soluções. 3 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

A construção do corpo dos quase-homomorfismos

Cléia Fabiane Winck¹

Universidade Estadual do Oeste do Paraná
cleiafabiane@hotmail.com

Sandro Marcos Guzzo

Universidade Estadual do Oeste do Paraná
smguzzo@gmail.com

Resumo: Desde o século XIX, vários matemáticos tem se dedicado à formalização da existência dos números reais através de sua construção algébrica, sendo que o método mais popular desta construção é partindo do conjunto dos racionais, assim como foi proposto por Richard Dedekind. Para isso, entretanto, é necessário construir primeiro os conjuntos dos naturais, inteiros, e por fim, o dos racionais. Tal construção é feita usualmente da seguinte forma: os números naturais podem ser caracterizados pela axiomática de Peano, e em seguida os números inteiros são construídos por meio de classes de equivalência de pares ordenados de números naturais. Por fim, são construídos os números racionais meio de classes de equivalência de pares ordenados de números inteiros. Apenas após essa construção lógica é possível obter o conjunto dos números reais pelos cortes de Dedekind, ou ainda por sequências de Cauchy. No século XIX porém, alguns matemáticos, como Ross (1985), realizaram a construção dos números reais de forma diferenciada, diretamente do conjunto dos números inteiros. Para isso, construiremos o corpo dos quase homomorfismos, sobre o qual é possível provar a ordenação e a completude, o que garante que este corpo é isomorfo ao conjunto dos números reais.

Palavras-chave: Quase-homomorfismos; números reais.

Quase-homomorfismos

O primeiro registro que se tem da construção do corpo dos números reais diretamente do anel dos números inteiros foi escrito em 1985, por Ross Street. Este artigo inspirou outros autores a escreverem sobre o tema, como é o caso de Odgers e Nobert Campo, o que nos permite construir um trabalho detalhado sobre este tema. Essa construção parte da utilização de funções especiais, chamadas de quase homomorfismos.

Nesta seção, faremos uma breve conceituação sobre a álgebra dos quase-homomorfismos, apresentando resultados que serão posteriormente utilizados na realização deste trabalho.

Definição 1. Seja $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} | f \text{ é função}\}$. Dizemos que $f \in \mathcal{F}$ é *limitada* se sua imagem é limitada, ou seja, se existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f(p)| \leq M, \text{ para todo } p \in \mathbb{Z}.$$

¹Bolsista do programa de Iniciação Científica e Mestrado - PICME-CNPq/CAPES.

Definição 2. Uma função $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ é dita um *quase homomorfismo* se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f(p+q) - f(p) - f(q)| \leq k, \text{ para quaisquer } p, q \in \mathbb{Z}.$$

Nesse caso, dizemos que k é a constante de aditividade de f , e denotamos:

$$\mathcal{QH} := \{f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} | f \text{ é quase homomorfismo}\}.$$

Note que se considerarmos $k = 0$, a função f é um homomorfismo. Entretanto, para que a função seja um quase homomorfismo não é suficiente que a distância entre $f(p+q)$ e $f(p) + f(q)$ seja diferente de 0, mas que seja limitada por uma constante k .

Ainda, se considerarmos a soma de duas funções de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$, podemos provar que o conjunto $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} | f \text{ é função}\}$ é um grupo abeliano.

Proposição 3. $\mathcal{F}$ é um grupo abeliano sob a adição usual de funções

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

A partir disso, podemos provar que $\mathcal{QH}$ é um subgrupo de $\mathcal{F}$, com a operação de adição, conforme a proposição a seguir.

Proposição 4. $\mathcal{QH}$ é um subgrupo de $(\mathcal{F}, +)$.

Proposição 5. O conjunto $\mathcal{B} = \{f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} | f \text{ é uma função limitada}\}$ é um subgrupo de $\mathcal{QH}$.

Sobre o comportamento dos quase-homomorfismos, temos vários resultados importantes, que serão listados no decorrer desta seção.

Lema 6. Seja $f \in \mathcal{QH}$ tal que $f(n)$ assume valores arbitrariamente positivos quando n percorre $\mathbb{N}$. Então, para qualquer $D > 0$, existe um $N > 0$ tal que

$$f(nN) > (n+1)D,$$

qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

Prova. Seja $f \in \mathcal{QH}$ com constante de aditividade k . Sejam $D > 0$ e $E = k + D$.

Como $f(n)$ assume valores positivos arbitrários, podemos definir $N > 0$ tal que $f(N) > 2E$. Provaremos por indução sobre n que

$$f(nN) > (n+1)E, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

i) Para $n = 1$, temos

$$f(N) > 2E.$$

ii) Suponha válido para $n \in \mathbb{N}$. Isto é

$$f(nN) > (n+1)E.$$

Assim, para $n+1$ temos

$$\begin{aligned} f((n+1)N) &= f(nN + N) = f(nN + N) + f(nN) - f(nN) + f(N) - f(N) \\ &= f(nN + N) - f(nN) - f(N) + f(nN) + f(N) \\ &> -k + (n+1)E + 2E \\ &= D - E + (n+1)E + 2E \\ &= D + (n+1)E + E \\ &= D + (n+2)E \\ &> (n+2)E = (n+1+1)E, \end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

□

Lema 7. *Seja $f \in \mathcal{QH}$. Então exatamente uma das informações é válida:*

i) f é limitada;

ii) Dado $C \in \mathbb{N}$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(p) > C$ sempre que $p > N_0$;

iii) Dado $C \in \mathbb{N}$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(p) < -C$ sempre que $p > N_0$.

Lema 8. *Seja $f \in \mathcal{QH}$ com constante de aditividade k . Então*

$$|pf(q) - qf(p)| \leq (|p| + |q| + 2)k.$$

Lema 9. *Seja $f \in \mathcal{QH}$. Então existem $A, B \in \mathbb{N}$ tais que para todo $p \in \mathbb{Z}$ temos*

$$|f(p)| \leq A|p| + B.$$

Lema 10. *Seja $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ com as seguintes propriedades*

i) $f(p) = -f(-p)$, quando $p < 0$

ii) Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|f(m+n) - f(m) - f(n)| \leq k$, quaisquer que sejam $m, n \in \mathbb{N}$.

Então $f \in \mathcal{QH}$.

Prova. Para provar que f é um quase homomorfismo precisamos mostrar que para quaisquer que sejam $p, q \in \mathbb{Z}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|f(p+q) - f(p) - f(q)| \leq k$. Para isso, vamos considerar três casos. O caso em que p e q são maiores que zero já é atendido pela hipótese do lema, pois nesse caso $p, q \in \mathbb{N}$ e portanto a hipótese garante que $|f(p+q) - f(p) - f(q)| \leq k$. Resta considerar os casos em que p e q são ambos menores que zero, e os casos em que um é maior e outro menor que zero.

i) $p > 0, q < 0$. Nesse caso temos

$$\begin{aligned} |f(p+q) - f(p) - f(q)| &= |-f(-(p+q)) - (-f(-p)) - (-f(-q))| \\ &= |-f(-p+(-q)) + f(-p) + f(-q)| \\ &= |f(-p+(-q)) - f(-p) - f(-q)|, \end{aligned}$$

e como $p, q < 0$ segue que $-p, -q \in \mathbb{N}$ e portanto

$$|f(p+q) - f(p) - f(q)| \leq k.$$

ii) $pq < 0$ e $p+q < 0$.

Vamos considerar, sem perda de generalidade $p > 0$ e $q < 0$, e denotaremos $a = p$ e $b = -(p+q)$. Nesse caso temos $a > 0$ e $b > 0$, logo, $a, b \in \mathbb{N}$, e ainda, $a+b = -q$. Dessa forma temos

$$\begin{aligned} |f(p+q) - f(p) - f(q)| &= |-f(-p+(-q)) - f(p) - (-f(-q))| \\ &= |-f(-p+(-q)) - f(p) + f(-q)| \\ &= |-f(-a+(a+b)) - f(a) + f(a+b)| \\ &= |f(a+b) - f(-a+(a+b)) - f(a)| \\ &= |f(a+b) - f(-a+a) - f(a) - f(b)| \\ &= |f(a+b) - f(a) - f(b)|. \end{aligned}$$

Como a e b são números naturais, segue que

$$|f(p+q) - f(p) - f(q)| \leq k.$$

iii) $pq < 0$, com $p+q \geq 0$.

Novamente vamos considerar $p > 0$ e $q < 0$, e denotaremos $a = -q$ e $b = p+q$. Assim, $a > 0$ e $a+b = p > 0$. Então

$$\begin{aligned} |f(p+q) - f(p) - f(q)| &= |f(b) - f(a+b) - (-f(-q))| \\ &= |f(b) - f(a+b) + f(a)| \\ &= |(f(a) + f(b)) - f(a+b)| \\ &= |f(a+b) - (f(a) + f(b))| \\ &= |f(a+b) - f(a) - f(b)|, \end{aligned}$$

e assim, concluímos que, nesse caso $|f(p+q) - f(p) - f(q)| \leq k$.

Logo, quaisquer que sejam $p, q \in \mathbb{Z}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|f(p+q) - f(p) - f(q)| \leq k$, o que nos garante que f é um quase homomorfismo.

□

Definição 11. Sejam $f, g \in \mathcal{QH}$. A multiplicação de f por g é dada por

$$(fg)(p) = (f \circ g)(p), \text{ para todo } p \in \mathbb{Z}.$$

Proposição 12. *Sejam $f, g \in \mathcal{QH}$. Então $f \circ g \in \mathcal{QH}$.*

Proposição 13. *Valem as seguintes propriedades para a multiplicação em $\mathcal{QH}$:*

- i) Quase-comutatividade: Se $f, g \in \mathcal{QH}$, então a função $(f \circ g) - (g \circ f)$ é limitada.*
- ii) A função identidade, dada por $i(p) = p$, é o elemento neutro para a multiplicação em $\mathcal{QH}$.*
- iii) Quase-distributividade: Se $f, g, h \in \mathcal{QH}$, então a função $f \circ (g + h) - (f \circ g + f \circ h)$ é limitada.*

Prova.

i) Sejam $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ as constantes de aditividade de f e g , respectivamente. Tomando $q = g(p)$ no lema (8) temos

$$|pf(g(p)) - g(p)f(p)| \leq (|p| + |g(p)| + 2)k_1.$$

Como g é também um quase homomorfismo, pelo lema (8) temos

$$|pg(q) - qg(p)| \leq (|p| + |q| + 2)k_2,$$

ou ainda,

$$|qg(p) - pg(q)| \leq (|p| + |q| + 2)k_2.$$

Assim, tomando $q = f(p)$,

$$|f(p)g(p) - pg(f(p))| \leq (|p| + |f(p)| + 2)k_2.$$

Das desigualdades acima segue que

$$\begin{aligned} |pf(g(p)) - pg(f(p))| &= |pf(g(p)) - g(p)f(p) + g(p)f(p) - pg(f(p))| \\ &\leq |pf(g(p)) - g(p)f(p)| + |f(p)g(p) - pg(f(p))| \\ &\leq (|p| + |f(p)| + 2)k_2 + (|p| + |g(p)| + 2)k_1. \end{aligned}$$

Tomando $k = \max\{k_1, k_2\}$, pelo lema (9), como f e g são quase homomorfismos, então $f(p)$ e $g(p)$ são limitadas por uma função afim do módulo p . Assim, podemos escrever as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} |p||f(g(p)) - g(f(p))| &= |pf(g(p)) - pg(f(p))| \\ &\leq (|p| + |f(p)| + 2)k + (|p| + |g(p)| + 2)k \\ &= (2|p| + |f(p)| + |g(p)| + 4)k \\ &= 2|p|k + 4k + k(|f(p)| + |g(p)|) \\ &\leq 2|p|k + 4k + k((A|p| + B) + (C|p| + D)), A, B, C, D \in \mathbb{N} \\ &= (2k + (A + C)k)|p| + k(4 + B + D). \end{aligned}$$

Note que $(2k + (A + C)k)$ e $k(4 + B + D)$ são números naturais, logo, podemos denotar $(2k + (A + C)k) = E$ e $k(4 + B + D) = F$, com $E, F \in \mathbb{N}$. E assim,

$$|p||f(g(p)) - g(f(p))| \leq E|p| + F.$$

Se $p \neq 0$, dividindo ambos os membros por $|p|$ temos o seguinte

$$|f(g(p) - g(f(p)))| \leq E + \frac{F}{|p|},$$

e como $p \neq 0$ e $p \in \mathbb{Z}$, segue que $|p| \geq 1$, e então $E + \frac{F}{|p|} \leq E + F$ assim

$$|f(g(p) - g(f(p)))| \leq E + F.$$

Note que para $p \neq 0$, $(f \circ g) - (g \circ f)$ é limitada por $E + F$. Entretanto, não podemos afirmar que a função toda é limitada por $E + F$, pois não sabemos se isso ocorre com $(f \circ g)(0) - (g \circ f)(0)$. Nesse caso, basta tomar $M = \max \{E + F, |f(g(0)) - g(f(0))|\}$, e temos a garantia de que f é limitada por M .

ii) Seja $f \in \mathcal{QH}$. Então

$$\begin{aligned} |(i \circ f)(x) - f(x)| &= |i(f(x)) - f(x)| \\ &= |f(x) - f(x)| \\ &= 0 \leq k \text{ para todo } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

iii) Seja f com constante de aditividade k . Tomando $x \in \mathbb{Z}$, denotemos

$$p = g(x) \in \mathbb{Z} \text{ e } q = h(x) \in \mathbb{Z}.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} |(f \circ (g + h))(x) - ((f \circ g) + (f \circ h))(x)| &= |f(g(x) + h(x)) - (f(g(x)) + f(h(x)))| \\ &= |f(p + q) - (f(p) + f(q))| \\ &= |f(p + q) - f(p) - f(q)| \leq k. \end{aligned}$$

Logo, $(f \circ (g + h)) - ((f \circ g) + (f \circ h))$ é limitada por k , e portanto vale a quase distributividade em $\mathcal{QH}$.

□

Lema 14. *Seja $f \in \mathcal{QH}$ com constante de aditividade k , e $p, q, r \in \mathbb{Z}$. Então*

$$|f(p + q + r) - f(p) - f(q) - f(r)| \leq 2k.$$

Prova. Como $f \in \mathcal{QH}$ temos

$$|f(q + r) - f(q) - f(r)| \leq k$$

e

$$|f(p + q + r) - f(p) - f(q + r)| \leq k,$$

logo,

$$\begin{aligned} |f(p + q + r) - f(p) - f(q) - f(r)| &= |f(p + q + r) - f(p) - f(q) - f(r) + f(q + r) - f(q + r)| \\ &\leq |f(p + q + r) - f(p) - f(q + r)| + |f(q + r) - f(q) - f(r)| \\ &\leq k + k = 2k. \end{aligned}$$

□

O corpo dos quase-homomorfismos

Nesta seção definiremos o conjunto das classes de equivalência de quase homomorfismos, e demonstraremos algumas propriedades que nos garantem que tal conjunto tem estrutura de corpo.

Definição 15. Sejam $f, g \in \mathcal{QH}$. f e g são *equivalentes* se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f(n) - g(n)| \leq k \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Para indicar que f e g são equivalentes usaremos a notação $f \sim g$.

Note que se $h \in \mathcal{QH}$, com constante de aditividade k , e $|h(n)| \leq M_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos afirmar que existe $M_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|h(x)| \leq M_1$ para todo $x \in \mathbb{Z}$. De fato, se $x \in \mathbb{Z}$, $x < 0$, então

$$\begin{aligned} |h(x)| - |h(0) - h(-x)| &\leq |h(-x + x) - h(-x) - h(x)| \leq k \\ &\Rightarrow |h(x) + h(-x) - h(-x + x)| \leq k. \end{aligned}$$

Ainda, podemos reescrever $h(x)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Rightarrow |h(x)| &= |h(x) + h(-x) - h(-x) - h(0) + h(0)| \\ \Rightarrow |h(x)| &\leq |h(x) + h(-x) - h(0)| + |h(-x)| + |h(0)| \leq k + |h(0)| + M_0 := M_1. \end{aligned}$$

Teorema 16. A relação $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{QH}$.

Prova. Vamos mostrar que a relação $f \sim g$ satisfaz as seguintes propriedades:

i) Reflexividade

$$|f(n) - f(n)| = 0 \leq k, \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, $f \sim f$.

ii) Simetria

Note que $|f(n) - g(n)| = |g(n) - f(n)|$, logo, se $|f(n) - g(n)| \leq k$, então $|g(n) - f(n)| \leq k$. Isto é, se $f \sim g$, então $g \sim f$.

iii) Transitividade

Sejam $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tais que $|f(n) - g(n)| \leq k_1$ e $|g(n) - h(n)| \leq k_2$. Assim, temos

$$\begin{aligned} |f(n) - h(n)| &= |f(n) - g(n) + g(n) - h(n)| \\ &\leq |f(n) - g(n)| + |g(n) - h(n)| \leq k_1 + k_2. \end{aligned}$$

Assim, se $f \sim g$ e $g \sim h$, então $f \sim h$.

Provados esses três itens, concluímos que a relação $\sim$ é uma relação de equivalência.

□

Denotaremos o conjunto dos quase homomorfismos equivalentes a f , ou seja, a classe de equivalência de f por $\bar{f}$.

Definição 17. Definimos o conjunto das classes de equivalência $\bar{f}$, com $f \in \mathcal{QH}$ da seguinte forma

$$\bar{f} = \{g \in \mathcal{QH} | f \sim g\}.$$

Note que $\bar{f} = \bar{g}$ se, e somente se, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|f(p) - g(p)| \leq k$, para todo $p \in \mathbb{Z}$. Dessa forma, definimos $\mathcal{R}$ o conjunto quociente de todos os quase-homomorfismos, pela relação de equivalência $\sim$. Temos

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{QH}}{\sim} = \{\bar{f}; f \in \mathcal{QH}\}.$$

Definiremos em $\mathcal{R}$ as seguintes operações:

$$\begin{aligned} \oplus : \mathcal{R} \times \mathcal{R} &\rightarrow \mathcal{R} \\ (\bar{f}, \bar{g}) &\mapsto \bar{f} \oplus \bar{g} = \overline{f + g}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \odot : \mathcal{R} \times \mathcal{R} &\rightarrow \mathcal{R} \\ (\bar{f}, \bar{g}) &\mapsto \bar{f} \odot \bar{g} = \overline{f \circ g}. \end{aligned}$$

Note que a operação $\oplus$ está bem definida, independente do representante da classe escolhido. Seja $f \in \mathcal{QH}$ com constante de aditividade k_3 . Se $f_1, f_2 \in \bar{f}$ e $g_1, g_2 \in \bar{g}$, então existem $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$|f_1(p) - f_2(p)| \leq k_1, \text{ para todo } p \in \mathbb{Z}.$$

e

$$|g_1(p) - g_2(p)| \leq k_2, \text{ para todo } p \in \mathbb{Z}.$$

Dessa forma, podemos escrever as seguintes desigualdades, para $q \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} |(f_1 + g_1)(q) - (f_2 + g_2)(q)| &\leq |f_1(q) - f_2(q)| + |g_1(q) - g_2(q)| \\ &\leq k_1 + k_2, \end{aligned}$$

de modo que $\overline{f_1 + g_1} = \overline{f_2 + g_2}$.

Da mesma forma, está bem definida a operação $\odot$. De fato,

$$\begin{aligned} |(f_1 \circ g_1)(q) - (f_2 \circ g_2)(q)| &= |f_1(g_1(q)) - f_2(g_2(q))| \\ &= |f_1(g_1(q)) - f_2(g_1(q)) + f_2(g_1(q)) - f_2(g_2(q))| \\ &\leq |f_1(g_1(q)) - f_2(g_1(q))| + |f_2(g_1(q)) - f_2(g_2(q))| \\ &\leq k_1 + |f_2(g_1(q)) - f_2(g_2(q))| \\ &= k_1 + |f_2(g_1(q) + g_2(q) - g_2(q)) - f_2(g_2(q))| \\ &\quad + |f_2(g_1(q) - g_2(q)) - f_2(g_1(q) - g_2(q))| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= k_1 + |f_2(g_2(q) + g_1(q) - g_2(q)) - f_2(g_2(q)) \\
 &+ f_2(g_1(q) - g_2(q)) - f_2(g_1(q) - g_2(q))| \\
 &\leq k_1 + |f_2(g_2(q) + g_1(q) - g_2(q)) - f_2(g_2(q)) - f_2(g_1(q) - g_2(q))| \\
 &+ f_2(g_1(q) - g_2(q)) \\
 &\leq k_1 + k_3 + f_2(g_1(q) - g_2(q)).
 \end{aligned}$$

Ainda, pela proposição (12), como a composição de quase homomorfismos é fechada, segue que existe $k_4 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_2(g_1(q) - g_2(q))| \leq k_4$, e portanto,

$$|(f_1 \circ g_1)(q) - (f_2 \circ g_2)(q)| \leq k := k_1 + k_3 + k_4$$

e assim, $\overline{(f_1 \circ g_1)}(q) = \overline{(f_2 \circ g_2)}(q)$, donde concluímos que a multiplicação está bem definida.

Teorema 18. $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ é corpo.

Prova. Precisamos provar que $(\mathcal{R}, +)$ é um grupo abeliano aditivo, e que $(\mathcal{R}, \cdot)$ é um grupo abeliano multiplicativo. Para isso, sejam $f \in \overline{\mathcal{F}}, g \in \overline{\mathcal{G}}$ e $h \in \overline{\mathcal{H}}$.

Como os elementos de $\mathcal{R}$ são quase homomorfismos, a associatividade, comutatividade, existência de elemento neutro e de simétrico da adição são consequência da proposição (3), restando apenas demonstrar a validade dos axiomas da multiplicação.

$M_1)$ Associatividade da multiplicação

Segue da definição de multiplicação em $\mathcal{QH}$, como composição de funções, que sabemos ser associativa. Logo,

$$\overline{f} \cdot (\overline{g} \cdot \overline{h}) = \overline{f} \circ (\overline{g} \circ \overline{h}) = \overline{f \circ (g \circ h)} = \overline{(f \circ g) \circ h} = (\overline{f} \cdot \overline{g}) \cdot \overline{h}.$$

$M_2)$ Comutatividade da multiplicação

Da mesma forma, temos que a composição de funções é comutativa, e assim

$$\overline{f} \cdot \overline{g} = \overline{(f \circ g)} = \overline{(g \circ f)} = \overline{g} \cdot \overline{f}.$$

$M_3)$ Existência de elemento neutro

O elemento neutro da multiplicação é o elemento $\overline{i}$ tal que $i \in \mathcal{QH}$ e $i(p) = p$. De fato,

$$\overline{f} \cdot \overline{i} = \overline{(f \circ i)} = \overline{f} = \overline{(i \circ f)} = \overline{i} \cdot \overline{f}.$$

$M_4)$ Existência de simétrico

Seja $\overline{f} \in \mathcal{R}$, $\overline{f} \neq \overline{0}$. Queremos mostrar que existe $\overline{g} \in \mathcal{R}$ tal que $\overline{f} \cdot \overline{g} = \overline{i} = \overline{g} \cdot \overline{f}$.

Como $\overline{f} \neq \overline{0}$, segue que $\overline{f}$ não é limitada. O lema (7) nos garante que se f é um quase-homomorfismo, exatamente um dos três itens citados ocorre. Uma vez que f não é limitada, restam apenas dois casos possíveis. Vamos supor primeiramente que o item *ii)* deste lema seja verdadeiro, isto é, dado $C \in \mathbb{N}$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(p) > C$ sempre que $N > N_0$.

A partir disso, definamos

$$g(x) = \begin{cases} \min\{z \in \mathbb{N}; f(z) \geq x\}, & \text{se } x \geq 0 \\ -g(-x), & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Vamos mostrar que $g \in \mathcal{QH}$. Para isso, pelo lema (10) resta mostrar que para $m, n \in \mathbb{N}$ existe $k \in \mathbb{N}$ de forma que

$$|g(m+n) - g(m) - g(n)| \leq k,$$

A partir de g , temos:

$$f(g(m+n)) \geq m+n > f(g(m+n)-1).$$

Analogamente,

$$f(g(m)) \geq m > f(g(m)-1)$$

e

$$f(g(n)) \geq n > f(g(n)-1).$$

Dessa forma, podemos escrever a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} f(g(m+n)) &\geq m+n > f(g(m)-1) + f(g(n)-1) \\ \Rightarrow f(g(m+n)) &> f(g(m)-1) + f(g(n)-1) \\ \Rightarrow f(g(m+n)) - f(g(m)-1) - f(g(n)-1) &> 0. \end{aligned}$$

Ainda, como $f \in \mathcal{QH}$, existe $k_f \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f((g(m)-1)+1) - f(g(m)-1) - f(1)| \leq k_f,$$

e portanto

$$|f(g(m)) - f(g(m)-1) \leq k_f + |f(1)|.$$

Analogamente,

$$|f(g(n)) - f(g(n)-1) \leq k_f + |f(1)|$$

e

$$|f(g(m+n)) - f(g(m+n)-1) \leq k_f + |f(1)|,$$

donde concluimos o seguinte:

$$\begin{aligned} f(g(m+n)) - f(g(m)) + f(g(m)) - f(g(m)-1) - f(g(n)) + f(g(n)) - f(g(n)-1) &> 0 \\ \Rightarrow f(g(m+n)) - f(g(m)) - f(g(n)) &> f(g(m)-1) - f(g(m)) + f(g(n)-1) - f(g(n)) \\ &= -[f(g(m)) - f(g(m)-1)] - [f(g(n)) - f(g(n)-1)] \\ &\leq -(k_f + |f(1)|) - (k_f + |f(1)|) \\ &= -2(k_f + |f(1)|). \end{aligned}$$

Vamos denotar $-2(kf + |f(1)|)$ por k_1 . Como $f(g(m+n)-1) < m+n$, $f(g(m)) \geq m$ e $f(g(n)) \geq n$, segue que

$$f(g(m+n)-1) - f(g(m)) - f(g(n)) < m+n - m - n = 0,$$

e assim,

$$\begin{aligned} f(g(m+n)) - f(g(m)) - f(g(n)) &< f(g(m+n)) - f(g(m+n)-1) \\ &< k_f + |f(1)|. \end{aligned}$$

Denotemos ainda $k_f + |f(1)|$ por k_2 , e tomemos $k_3 = \max\{-k_1, k_2\}$, temos $|f(g(m+n)) - f(g(m)) - f(g(n))| \leq k_3$.

Ainda, pelo lema (14) temos que

$$\begin{aligned} |f(g(m+n) - g(m) - g(n)) - f(g(m+n)) - f(g(m)) - f(g(n))| &\leq 2k_f \\ \Rightarrow |f(g(m+n) - g(m) - g(n))| &\leq 2k_f + k_3, \end{aligned}$$

o que nos permite concluir que existe $k_g \in \mathbb{N}$ tal que

$$|g(m+n) - g(m) - g(n)| \leq k_g,$$

para quaisquer que sejam $m, n \in \mathbb{N}$, e assim, podemos afirmar que $g \in \mathcal{QH}$.

Note que, como $f(g(m)) - f(g(m)-1) \leq k_f + |f(1)|$ e $|f(g(m))| \geq m > f(g(m)-1)$, então $f(g(m)) \geq m > f(g(m)-1) \geq f(g(m)) - k_f - |f(1)|$. Assim, denotando $k_f + |f(1)| = \tilde{k}$, temos para todo $m \in \mathbb{N}$ que

$$0 \leq f(g(m)) - m \leq \tilde{k},$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \overline{f \circ g - i} &= \bar{0} \\ \Rightarrow \overline{f \circ g} - \bar{i} &= \bar{0} \\ \Rightarrow \bar{f} \cdot \bar{g} &= \bar{i}. \end{aligned}$$

Da comutatividade da operação, segue que também $\bar{g} \cdot \bar{f} = \bar{i}$.

O caso em que para todo $C \in \mathbb{N}$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $f(p) < -C$ para todo $p > N_0$ é análogo a este, considerando a função $(-f)$. Operando de maneira similar ao que fizemos, concluímos também para esse caso a existência de elemento simétrico na multiplicação.

D) Distributividade da multiplicação em relação à adição.

Pela proposição (13) temos que $f \circ (g+h) \sim f \circ g + f \circ h$, e assim

$$\begin{aligned} \bar{f} \cdot (\bar{g} + \bar{h}) &= \bar{f} \cdot \overline{(g+h)} \\ &= \overline{f \circ (g+h)} \\ &= \overline{(f \circ g) + (f \circ h)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \overline{(f \circ g)} + \overline{(f \circ h)} \\ &= \overline{f} \cdot \overline{g} + \overline{f} \cdot \overline{h}. \end{aligned}$$

□

Conclusões

É possível provar ainda a completude e a ordem em $\mathcal{R}$, o que nos permite afirmar que tal corpo é isomorfo ao corpo dos números reais, devido a um teorema que afirma que todo corpo ordenado e completo é isomorfo ao corpo dos números reais.

Por outro lado, se dois corpos são ditos isomorfos, podemos dizer que se uma propriedade é válida em um corpo, também é válida no corpo isomorfo. Assim, podemos considerar dois corpos isomorfos como essencialmente idênticos, o que nos permite concluir que construindo o corpo $\mathcal{R}$, concluímos a construção dos números reais.

Referências

- ARTHAN, R. D. **The Eudoxus Real Numbers**. (preprint, September 2003).
- DOUGLAS, James; KIROLLOS, Rony; ODGERS, Ben; STREET, Ross; VO, Nguyen Hanh. **The efficient real numbers**. Maquarie University, 2004. Disponível em <https://pdfs.semanticscholar.org/5bad/2456b4bfb03fa5aca26f8c661a90e16cfdd1.pdf> Acesso em 20 out 2018.
- HOJAIJ, Sarah. **A construção do corpo dos números reais através de quase-homomorfismos**. 58 p. Trabalho de conclusão de curso - Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, 2013.
- IEZZI, G.; DOMINGUES, H. H. **Álgebra Moderna**. 2ª edição. São Paulo: Atual, 1982.
- STREET, Ross. **An efficient construction of the real numbers**. Gazette of the Australian Math. Soc. 12, 1985.

O uso de metodologias diferenciadas no ensino da matemática: reflexões a partir do estágio supervisionado

Cléia Fabiane Winck
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
cleiafabiane@hotmail.com

Diessica Aline Quinot
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
diessicaquinot@gmail.com

Resumo: As Tendências em Educação Matemática surgiram com a necessidade de desenvolver uma prática adequada à realidade atual, com criatividade e responsabilidade. Muitos professores acreditam que o ensino tradicional não é satisfatório, mesmo assim, são relutantes em utilizar outra forma de ensinar, pois para isso é necessário entrar em uma zona de risco, dando mais visibilidade e voz aos alunos. Dessa forma, buscando aprimorar nossa prática docente e visando a aprendizagem significativa dos alunos, no estágio obrigatório do curso de licenciatura em matemática, optamos por utilizar um misto das Tendências em Educação Matemática como metodologia para o ensino de geometria analítica. O objetivo deste trabalho é apontar os benefícios do uso de metodologias diferenciadas nas aulas de matemática, trazendo exemplos de situações vivenciadas durante o estágio, e algumas reflexões sobre essas experiências.

Palavras-chave: Tendências; Educação Matemática.

1 Introdução

Há frequentes críticas na Educação Básica em relação à dificuldade dos alunos em aprender matemática. Tal disciplina é vista muitas vezes como algo muito abstrato e sem sentido, o que motiva o surgimento de pesquisas sobre fatores que podem influenciar na aquisição da aprendizagem.

Entre os fatores observados, muito se discute sobre o modo de ensinar. É consenso entre vários autores que o ensino tradicional em geral não traz efeitos positivos na aprendizagem. Entre esses autores, destacamos Gatti (1992). Segundo a autora

Está na hora da escola assumir seu papel na sociedade atual. As inovações que temos presenciado têm deixado a educação para trás e também, os educadores, para trás. Estamos convivendo com uma geração de jovens que estão adquirindo novas habilidades e formas de pensar diante de um vídeo game, por exemplo, os quais, na escola, assistem ao professor demonstrar, de forma clássica, um teorema. Tal fato nos leva a pensar na necessidade urgente de abrir essas novas formas do saber humano, de gerar e de disseminar o conhecimento na formação do professor, quer seja na sua formação básica no curso de magistério, quer seja na sua formação continuada, isso se não quisermos ficar estagnados no século XXI. (GATTI, 1992, p. 157).

Muitos professores reconhecem a falta de efetividade no ensino tradicional, mesmo assim, são relutantes em utilizar outra forma de ensinar, pois para isso seria necessário sair de sua zona de conforto, entrando em uma zona de risco, dando mais visibilidade e voz aos alunos. Nesta zona de risco, os professores tendem a se sentir desafiados por alunos com uma postura mais crítica e temem não serem vistos mais como uma autoridade dentro da sala de aula.

Nesse sentido, Skovsmose (2011) afirma que melhorias na Educação Matemática estão fortemente ligadas à quebra do contrato didático, e portanto, ruptura da concepção de ensino tradicional, o que naturalmente gera uma incerteza no ambiente de aprendizagem. Entretanto, essa incerteza deve ser enfrentada e diagnosticada, não simplesmente deixada de lado.

Dessa forma, buscando aprimorar nossa prática docente e visando a aprendizagem significativa dos alunos no estágio obrigatório do curso de licenciatura em matemática, optamos por utilizarmos um misto das Tendências em Educação Matemática como metodologia, pois acreditamos que essa seja uma maneira de tornar o ensino da matemática mais significativo.

As Tendências em Educação Matemática surgiram com a necessidade de desenvolver uma prática adequada à nossa realidade atual, com criatividade e responsabilidade, tornando o ensino da matemática mais eficaz e significativa.

Entre as Tendências estudadas podemos destacar: Resolução de Problemas, Modelagem Matemática, Tecnologia em Educação Matemática, Etnomatemática, Investigação Matemática e História da Matemática. Cada uma delas possui características diferentes e, se utilizadas de maneira apropriada pelos professores, favorecem a aprendizagem dos alunos.

Dentre estas tendências, a História da Matemática, de acordo com Lorenzato (2010) tem por objetivo mostrar como a matemática surgiu de uma necessidade contextualizada em determinado momento da história, e dessa forma, é uma maneira de mostrar a utilidade dos conceitos matemáticos, aplicando-os a situações reais.

Uma das responsabilidades do professor ainda, é fazer com que o aluno não apenas utilize a realidade para compreender a matemática, mas também que através da matemática possa compreender melhor a realidade que o cerca. Para que isso seja possível, o aluno pode utilizar a resolução de problemas relacionados à sua realidade e também às realidades passadas, vendo assim a Resolução de Problemas sob um ponto de vista histórico.

Destacamos ainda as vantagens da utilização da Investigação Matemática, que para ser bem-sucedida, segundo Ponte (2006), deve seguir quatro momentos principais: Exploração e formulação de questões, Conjecturas, Testes e Reformulação, Justificativa e Avaliação. Em uma Investigação Matemática o aluno é chamado a agir como um matemático, tirando suas próprias conclusões sobre determinado assunto. Dessa forma, tende a sentir uma maior motivação para pensar matematicamente, o que ajuda a desmanchar a crença de que a matemática é para poucos.

Dentre todas as tendências, destacamos aquela que teve predominância em nossos planejamentos: Tecnologias em Educação Matemática. O uso de tecnologias para ensinar matemática não se restringe apenas ao uso de computadores, mas também de calculadoras, vídeos, internet

e softwares diversos. De acordo com Reis (2009) a tecnologia educacional pode ser caracterizada como um conjunto de técnicas cujo objetivo é facilitar o processo de ensino e aprendizagem através de meios simbólicos ou instrumentais.

No conteúdo de geometria analítica, que foi abordado em nossas atividades de regência, o uso de tecnologias traz inúmeros benefícios, tanto na visualização gráfica dos elementos, quanto na facilitação das construções geométricas. Podemos ainda encontrar vários vídeos que tornam o ensino de tal conteúdo mais dinâmico e atrativo.

Para que se faça um bom uso das tecnologias, é necessário que não apenas mude a ferramenta utilizada para ensinar, mas que também os métodos sejam modernizados, para que as aulas não se tornem monótonas como as tradicionais. Ponte, Oliveira e Varandas indicam o seguinte:

O professor, em vez de agir como simples transmissor de conteúdos e de informações, com controle quase total sobre as situações em que os alunos são receptores passivos, precisa criar situações desafiantes, apoiar, motivar, propor explorações, de modo que seus estudantes levantem conjecturas, testem hipóteses e eles próprios cheguem às suas conclusões. (PONTE, OLIVEIRA E VARANDAS, 2003).

Além das tendências citadas, destacamos o importante papel dos jogos no processo de ensino e aprendizagem. Jogos e brincadeiras são vistos por muitos como simples passatempo sem finalidades educativas. Entretanto, desde que bem elaborado, o jogo pode ser visto como uma estratégia de ensino, podendo atingir diferentes objetivos, desde a simples fixação de um conteúdo trabalhado, até a aprendizagem de novos conceitos. A parte principal é que esse processo se dará de uma forma mais dinâmica do que o usual, gerando motivação e interesse nos alunos.

Por fim, falando em Educação Matemática, a atuação do professor em sala de aula norteada nas Tendências em Educação Matemática torna-se extremamente enriquecida, alcançando o objetivo principal de todo professor: otimizar o processo de ensino-aprendizagem da matemática, dando a ela mais significado.

Faz parte do papel do professor analisar qual é o momento adequado para utilizar cada uma das tendências, uma vez que se empregadas de maneira errada podem, em vez de facilitar, representar um obstáculo no ensino-aprendizagem.

Dessa forma, descreveremos algumas atividades realizadas durante o estágio de regência, enquadrando-as nas Tendências em Educação Matemática, ou ainda, como atividades diferenciadas, e apontando benefícios da utilização das mesmas, de acordo com nossa prática.

2 Vídeos - “Um ponto de vista” e “O jardim de números”

No primeiro dia da regência, utilizamos o vídeo “Um ponto de vista”, disponível no site da secretaria do estado da educação, com o objetivo de introduzir noções de geometria analítica, com conceitos mais voltados ao plano cartesiano. Esse vídeo fazia

relações entre a geometria analítica e a arte, com o exemplo do pontilhismo, mostrando que apesar de tal conteúdo parecer abstrato e sem aplicações, é muito importante para resolver vários problemas reais. O download do vídeo pode ser feito pelo seguinte link: <http://www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/video/showVideo.php?video=7312>.

Essa atividade foi de grande importância para que os alunos visualizassem aspectos da geometria analítica no cotidiano, como é o caso do pontilhismo, exemplificado no vídeo. Além da atividade envolver o uso das tecnologias, ainda podemos destacar como benefício o conhecimento de parte da história da geometria analítica, o que mostra principalmente que muitos conceitos aparentemente sem aplicação surgiram de alguma necessidade que se teve, cuja solução não seria possível apenas com as ferramentas existentes até o momento.

Nesse sentido, Dambrosio (1999) afirma que *“um dos maiores erros que se pratica em Educação Matemática, é desvincular a Matemática das outras atividades humanas”*. Dessa forma, utilizar a história da matemática, é mostrar o vínculo entre a matemática e uma situação oriunda da realidade, trazendo significado ao ensino desses conceitos.

Ainda, no decorrer das aulas, utilizamos o vídeo “O jardim de números”, que pode ser encontrado juntamente com uma sugestão de sequência didática no link <http://www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=1326>. A finalidade do vídeo foi introduzir uma atividade de construção da bandeira do Brasil utilizando coordenadas cartesianas. Tal vídeo contribuiu também para a visualização de relações entre o conteúdo visto em sala e a realidade. O vídeo trazia as medidas da bandeira do Brasil, e orientava a construção da mesma no plano cartesiano, mantendo as proporções do Inmetro. Dessa forma, foi preciso que os alunos utilizassem o conhecimento sobre geometria analítica para abordar a situação dada, realizando a construção da bandeira através da localização dos pontos adequados no plano cartesiano.

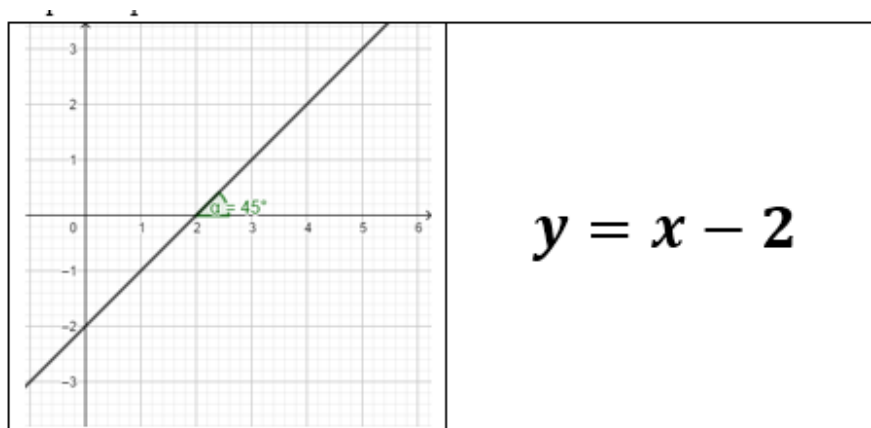
3 Jogos - Batalha Naval com coordenadas cartesianas e jogo da memória da equação da reta

Na semana inicial da regência, os alunos jogaram batalha naval, com um tabuleiro adaptado para coordenadas cartesianas. Esse jogo desenvolveu-se primeiro no coletivo, onde cada aluno em sua vez dava seu palpite sobre a localização das embarcações. Tal jogo fez com que os alunos aprimorassem aos poucos a noção de localização de pontos no plano cartesiano.

Além do conteúdo matemático envolvido no jogo, podemos citar ainda como benefício desta prática o desenvolvimento de regras e a interação entre os alunos, favorecendo o surgimento de relações sociais, o que é defendido por (Kammi,1992, p.172). A autora ainda destaca que nem sempre a resolução de exercícios tem capacidade de desenvolver a autonomia dos alunos, já que muitas vezes nesse tipo de atividade o aluno permanece passivo.

Outro jogo utilizado em sala de aula foi o jogo da memória da equação da reta, cujos pares eram formados por uma equação reduzida de reta e seu respectivo gráfico. Este jogo foi

extremamente importante para a visualização do coeficiente angular e linear de uma reta, de modo que os alunos aprimoraram a capacidade de identificar a equação de uma reta após a visualização do seu gráfico. Segue exemplo de par:



Durante os jogos, percebemos o entusiasmo de alguns alunos que não tinham interesse em realizar as outras atividades. Como os jogos eram de competição, estes alunos muitas vezes ganharam as disputas dos colegas, evidenciando que cada indivíduo tem a sua própria maneira de aprender, além de preferências quanto ao método de ensino.

4 Utilização do Software GeoGebra na formalização de conceitos

Durante as dezoito aulas desenvolvidas, buscamos ainda utilizar sempre que possível o Software GeoGebra na formalização de conceitos, uma vez que o mesmo possui ferramentas que possibilitam a visualização e manipulação dos objetos geométricos.

A utilização de tecnologias semelhantes à este software é defendida por Kenski

“Não há dúvida de que as novas tecnologias de comunicação e informação trouxeram mudanças consideráveis e positivas para a educação. Vídeos, programas educativos na televisão e no computador, sites educacionais, softwares diferenciados transformam a realidade da aula tradicional, dinamizam o espaço de ensino aprendizagem, onde, anteriormente, predominava a lousa, o giz, o livro e a voz do professor.” (KENSKI, 2007)

De fato, durante o andamento das aulas, pudemos perceber o enriquecimento proporcionado pelo uso do software. Os alunos não tiveram um contato anterior com o GeoGebra, de modo que apresentação desta ferramenta despertou a curiosidade dos mesmos.

Destacamos que os alunos apresentaram interesse pela movimentação dos objetos construídos no plano cartesiano, através dos controles deslizantes e análise da consequência destes movimentos. Essa experiência permitiu que os alunos fizessem conjecturas em relação a consequência de cada movimento, o que não seria possível apenas com instrumentos de aprendizagem estáticos, como o livro didático.

5 Resolução de problemas

No de ensino tradicional, frequentemente usam-se exercícios que envolvem os conceitos trabalhados, para que o aluno aprenda determinado algoritmo através da repetição. Em nossas aulas, entretanto, buscamos utilizar ao máximo situações problema em vez de exercícios. Nesse sentido, Dante (2011) traz a diferenciação entre o conceito de exercício e problema, que muitos vezes são tidos como sinônimos.

Exercício, como o próprio nome diz, serve para exercitar, para praticar um determinado algoritmo ou processo. O aluno lê o exercício e extrai as informações necessárias para praticar uma ou mais habilidades algorítmicas. Problema - processo [...] é a descrição de uma situação onde se procura algo desconhecido e não se tem previamente nenhum algoritmo que garanta sua solução. (DANTE, 2011)

Com base nisso, podemos afirmar que situações-problemas costumam atrair mais a atenção dos alunos, por conta de sua natureza desafiadora. Além disso, os problemas estimulam o raciocínio lógico através da elaboração de uma estratégia para a resolução, o que dificilmente ocorre quando utilizamos apenas exercícios.

Das experiências que tivemos com a resolução de problemas, podemos citar a aula sobre distância entre dois pontos, aula essa que partiu da resolução de um problema, sem que os alunos conhecessem a fórmula de antemão. Apesar disso, alguns alunos conseguiram resolver o problema a partir de conhecimentos prévios, chegando a utilizar a fórmula da distância entre dois pontos, sem saber que essa era a fórmula geral, o que contribuiu para que a aprendizagem fosse significativa, pois aprenderam a não apenas decorar a fórmula, mas saber porque funciona e de onde resultou.

6 Considerações finais

Através das análises feitas durante o estágio e dos também registros das avaliações escritas dos alunos, podemos concluir que o uso de metodologias diferenciadas no ensino da matemática foi efetivo. Observamos que os alunos não só apresentaram um resultado satisfatório nas avaliações, como também mostraram-se participativos durante as aulas.

Destacamos ainda que apesar de buscarmos desde o princípio as inovações nos métodos de ensino, em alguns momentos utilizamos também de aulas expositivas, o que também não pode ser considerado um erro, uma vez que nem todas as aulas precisam apresentar alta dose de criatividade e inovação, mas é necessário saber dosar.

É importante que não se foque em apenas uma metodologia específica, apesar dos benefícios incontestáveis de cada uma delas. Devemos considerar que qualquer que seja a sala de aula, ali existem alunos com personalidades diferentes, que aprendem de maneiras diferentes, dessa forma sempre haverá aquele aluno que aprende melhor através de um jogo, enquanto outro tem uma assimilação maior na resolução de um problema. Portanto, utilizar várias metodolo-

gias possibilita um alcance maior da aprendizagem do que seria possível restringindo-se à apenas uma maneira de ensinar.

Dessa forma, concluímos que os aprendizados que adquirimos durante esse estágio certamente serão muito importantes para nós como futuras professoras, visando sempre uma aprendizagem significativa.

7 Referências

- D'AMBROSIO, U. *A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática*. In: BICUDO, M. A. V.(org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999, p. 97-115.
- DANTE, Luiz Roberto. *Didática da Resolução de Problemas de Matemática*. São Paulo: Ática, 1991.
- DIRETRIZES CURRICULARES DE MATEMÁTICA PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA, Curitiba, 2006.
- GATTI, B. *Informação e Tecnologia*. In: Serbino, R. V., Bernardo, M. V. C. (Org.) Educadores para o Século XXI: Uma Visão Multidisciplinar. São Paulo: UNESP, 1992.
- KAMII, Constance; DECLARK, Geórgia. *Reinventando a aritmética: implicações da teoria de Piaget*. São Paulo: Papirus, 1992.
- KENSKI, V. M. *Tecnologias e ensino presencial e a distância*. Campinas (SP): Papirus, 2003. p. 91 e 92.
- LORENZATO, S. *Para aprender matemática*. 3. ed. São Paulo: Autores Associados, 2010.
- NUNES, C. B. *O Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática*. Rio Claro (SP), 2010.
- POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: interciência, 1995.
- PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.
- REIS, J. B. A. *O conceito de tecnologia e tecnologia educacional para alunos do ensino médio e superior*. Disponível em: http://alb.com.br/arquivo-morto/edicoes_anteriores/anais17/txtcompletos/sem16/COLE_932.pdf . Acesso em: 20 out. 2018.
- XAVIER, E. T.; PEDROSO, S. M. D. *A etnomatemática na dimensão educacional: encontrar a matemática subentendida na prática profissional*. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/45-4.pdf> Acesso em: 01 out. 2018

O uso de material concreto para o ensino de Geometria Plana: uma atividade aplicada no período do estágio supervisionado

Jaqueline do Nascimento
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
jaque_nasci@hotmail.com

Juliana Anjelika Santos de Souza
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
julianaanjelika12@hotmail.com

Francieli Cristina Agostinetto Antunes
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
franciellantunes@gmail.com

Resumo: Com o intuito de minimizar as dificuldades apresentadas pelos alunos, potencializar o interesse e tornar as aulas mais atrativas, elaboramos uma sequência de aulas envolvendo o conteúdo de Geometria Plana, que foi trabalhada com alunos do 3º ano do Ensino Médio por meio de materiais manipulativos. Atividades estas, desenvolvidas durante o período de estágio supervisionado obrigatório, vinculado a disciplina de Metodologia e Prática de Ensino: Estágio Supervisionado II que faz parte da grade curricular do 4º ano do curso de Licenciatura em Matemática da Unioeste *campus* Cascavel. O ensino de matemática por meio de materiais manipuláveis é sugerido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, (PCNEM) e ressaltado por diversos pesquisadores pela sua importância na aprendizagem de conceitos matemáticos. No texto consta também, um breve relato das atividades propostas, apresentando o material e a forma que o mesmo foi trabalhado, bem como a nossa percepção sobre o envolvimento e aprendizagem dos alunos.

Palavras-chave: Material manipulável; Geometria Plana; Estágio Supervisionado.

1 O uso de materiais manipuláveis no ensino de Matemática

A matemática é destacada muitas vezes por ser uma disciplina difícil, ser um “bicho de sete cabeças” em que muitos alunos apresentam dificuldade no processo de aprendizagem, demonstrando por vezes rejeição à disciplina. É difícil acreditar, mas em pleno século XXI encontramos a educação escolar com um caráter por vezes retrógrado. Há quem diga que se uma pessoa viajasse no tempo para os dias de hoje, o lugar que este indivíduo provavelmente reconheceria seria a escola. Exageros à parte, sabemos que a escola tem dificuldade de acompanhar as inovações ocorridas na sociedade, não apenas as tecnológicas, mas o ritmo em que as mudanças estão ocorrendo.

Tem se falado com maior intensidade no uso de diferenciadas metodologias para o ensino da matemática, não só nas pesquisas, mas nas orientações feitas pelos documentos que regem

a educação, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) e no Paraná as Diretrizes Curriculares da Educação Básica (DCE).

Os Parâmetros apresentam que para aprender Matemática de uma forma contextualizada e integrada é necessário o desenvolvimento de competências e habilidades, as quais, estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para “argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação” (1997, p.111) Sendo isso possível, com o incremento de metodologias, que proporcionam o uso de atividades diferenciadas que instigam o interesse do aluno. O documento ressalta que somente a utilização de exercícios do tipo “calcule...”, “resolva...” não são suficientes para aprimorar essas competências, que a seleção dos conteúdos e a forma de tratá-los no ensino são decisivas.

“A maneira como se organizam as atividades e a sala de aula, a escolha de materiais didáticos apropriados e a metodologia de ensino é que poderão permitir o trabalho simultâneo dos conteúdos e competências. Se o professor insistir em cumprir programas extensos, com conteúdos sem significado e fragmentados, transmitindo-os de uma única maneira a alunos que apenas ouvem e repetem, sem dúvida as competências estarão fora de alcance.” (BRASIL, 1997, p.113)

Em consonância, com os Parâmetros, as Diretrizes, inferem que os conteúdos não devem ser abordados de forma fragmentada, devem ser propostos por meio de tendências metodológicas as quais fundamentam a prática docente e enriqueçam o processo pedagógico, tornando assim mais eficaz o ensino-aprendizagem de matemática. As metodologias destacadas são: a Resolução de Problemas; a Modelagem Matemática; a Mídias Tecnológicas; a Etnomatemática; a História da Matemática; e a Investigações Matemáticas. Sendo que estas, têm grau de importância similar entre si e complementam-se uma às outras.

Percebemos assim, que a matemática, não deve ser abordada apenas de maneira abstrata, com poucas demonstrações concretas e recorrendo pouco às conexões com a realidade. Neste sentido, Silveira, Novello & Laurino (2011, p. 20), salientam que os materiais manipuláveis devem ser utilizados pois são objetos que “criam uma ligação entre a teoria e a prática, minimizando as rupturas de articulação entre o cotidiano e o saber escolar”.

Neste sentido, Reis (1982 apud Pinheiro, 2012) destaca alguns aspectos relacionados ao uso de materiais manipuláveis no ensino e aprendizagem da Matemática, entre eles a formação de conceitos como a essência da aprendizagem em Matemática e que a aprendizagem baseia-se na experiência, sendo a aprendizagem sensorial a base de toda a experiência, a qual constrói-se do concreto para o abstrato. Requerendo imprescindivelmente, o envolvimento ativo do aluno, pois a formação de abstrações matemáticas é um processo longo.

Assim, Lorenzato (2006, p. 43) defende que a utilização de materiais é fundamental na aprendizagem da matemática porque se houver uma utilização adequada, os alunos ampliam a sua “concepção sobre o que é, como e para quê aprender matemática, vencendo os mitos e preconceitos negativos” relacionados a disciplina.

No entanto, é preciso ter claro, que a utilização de materiais manipuláveis por si só não constitui nenhuma garantia de que haja aprendizagem. A utilização de materiais manipuláveis

constitui um meio e não um fim em si mesmo (Vale, 2002), sendo de relevante importância o papel do professor como mediador entre o aluno, o material manipulável e o conhecimento.

Bem como ressalta Graells (2000), o uso de materiais concretos,

“podem desempenhar no ensino, as seguintes funções: fornecer informação; constituir guiões das aprendizagens dos alunos; proporcionar o treino e o exercício de capacidades; cativar o interesse e motivar o aluno; avaliar as capacidades e conhecimentos; proporcionar simulações, com o objetivo da experimentação, observação e interação; criar ambientes (contextos de expressão e criação)” (GRAELLS, 2000)

Ao enfocarmos no ensino da geometria, não seria diferente, os materiais manipuláveis desempenham o mesmo papel, pois como é aludido por Lorenzato (1995, p.5) vivemos em um mundo de formas e “sem conhecer a Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida”.

2 As atividades desenvolvidas

Tendo como aparato, a eficácia do material manipuláveis no ensino de Matemática, exporemos um conjunto de atividades, trabalhadas em uma turma de 3º ano do Ensino Médio no qual propomos o uso desses, para o ensino e aprendizagem de Geometria Plana. Esperamos também que com a exposição destas atividades, outros professores façam uso de diferentes metodologias, em especial o uso de materiais manipuláveis para o ensino de matemática em sala de aula

Entre as atividades realizadas na regência, utilizamos o material manipulável para relembrar o cálculo de área de diferentes polígonos, com o intuito de não apenas apresentar uma expressão pronta e acabada, mas chegar as fórmulas a partir da manipulação destes materiais, construindo juntamente com os alunos conjecturas referentes ao cálculo, levando-os a pensar e formular hipóteses. Na figura 1, temos o material usado nesta atividade.

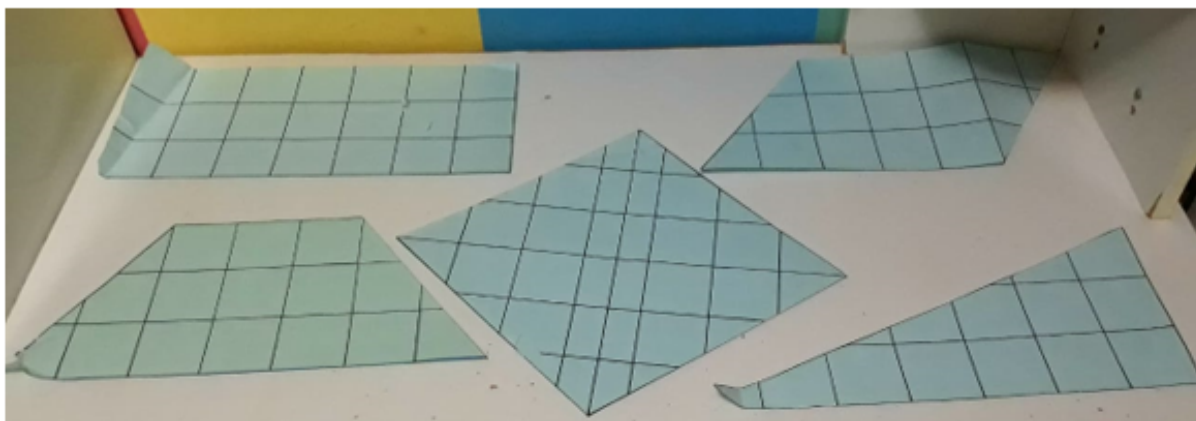


Figura 1: Material estudo da área

Fonte: Acervo dos autores

Na atividade, tomamos cada um dos quadrados desenhados, como uma unidade de área

de cada um dos polígonos e, íamos decompondo e sobrepondo os polígonos estudados, em triângulos, para que os alunos percebessem a relação existente entre as estes. Na execução desta atividade, entregamos para os alunos uma tabela, a qual teriam que preencher conforme definíamos as expressões do cálculo de área dos polígonos. Percebemos que nesta aula os alunos se mostraram atentos e participativos, sendo que se sentiam instigados a responder as nossas indagações. Os alunos mostraram-se interessados na atividade e participaram das discussões desencadeadas.

Percebemos que uma aula, a qual são formadas conjecturas juntamente com os alunos é muito proveitosa, pois os mesmos, sentem-se atuantes no processo de aprendizagem, contribuindo com o professor a conduzir o conteúdo a ser trabalhado.

Posteriormente, ao trabalharmos os conceitos de comprimento e área da circunferência, propomos uma atividade em trios, para os quais, distribuímos alguns corpos redondos, como, tampas de diferentes tamanhos; um pedaço de barbante; e réguas. Sendo, construído também no quadro uma tabela a qual os alunos deveriam registrar em seus cadernos, sendo que cada componente do grupo preencheria a sua, de acordo com as informações obtidas no grupo. Na tabela, deveriam preencher qual era o objeto utilizado, qual o comprimento, diâmetro e a razão do comprimento pelo diâmetro. Para saberem o valor do comprimento, explicamos que deveriam utilizar o barbante entregue para contornar o corpo redondo e depois esticá-lo sobre a régua para encontrar a medida.

Ao socializarmos a atividade, pedimos que um integrante de cada grupo, fosse até o quadro e anotasse os valores obtidos para um dos objetos entregues a eles. Após todos os grupos preencherem com um de seus resultados a tabela no quadro, questionamos se haviam percebido que os valores preenchidos na coluna da razão entre o comprimento e o diâmetro eram próximos, sendo que os objetos tinham dimensões diferentes. Questionamos também, a que número que essa medida se aproximava. Como esperado, os alunos conseguiram perceber que o número obtido da razão era o número π . Através dessa atividade, deduzimos a fórmula do comprimento da circunferência. Na figura 2, apresentamos parte dos corpos redondos entregues.



Figura 2: Material estudo do comprimento da circunferência

Fonte: Acervo dos autores

Na sequência, ao trabalhar a área do círculo, entregamos a cada grupo, um material manipulativo, o qual possui duas peças de E.V.A que juntas formam uma circunferência e quando separadas e organizadas de outra forma, podemos representar algo próximo de um retângulo. Ao utilizarmos esse material, estimulávamos os alunos a manipular o mesmo, para chegarem à representação da circunferência e do retângulo. E por meio de análises e discussões, os alunos perceberam que a altura do retângulo era igual ao raio da circunferência e que o comprimento, correspondia ao produto de π (pi) pelo raio, o qual era a metade do comprimento da circunferência. Sendo assim, poderiam calcular a área do retângulo. Com o uso de conjecturas feitas juntamente com os alunos, determinamos a fórmula para calcular a área da circunferência partindo do cálculo da área do retângulo. Os alunos participaram efetivamente da atividade e se mostraram curiosos ao manipular o material e perceber o encaixe das peças. A figura 3, explicita o material utilizado na atividade supracitada.



Figura 3: Material estudo do comprimento da circunferência

Fonte: Materiais Pedagógicos. Disponível em: <https://mmpmateriaispedagogicos.com.br/produto/area-do-circulo/>

Percebemos que com o auxílio do material manipulável e com a mediação feita por nós ao trabalhar os conteúdos destacados, o aprendizado dos alunos foi significativo, sendo isso percebido na resolução dos problemas posteriormente apresentados e nas atividades avaliativas realizadas.

Essa forma de abordagem, foi de grande valia também a nós, auxiliando em futuras práticas pedagógicas.

Conclusões

Sabe-se que o ensino de matemática, deve ser apresentado/ensinado com vistas a desenvolver uma aprendizagem significativa, resgatando conhecimentos prévios e promovendo a contextualização dos conceitos, em acordo com Lorenzato (1995) que diz que desde os tempos primitivos, o homem procurou entender e explicar os fenômenos da natureza, por meio de desenhos, medidas e anotações. Desta forma, o nosso objetivo, foi propor atividades diferenciadas, o uso do material concreto para o ensino de Geometria Plana, uma vez que, por meio deste, é possível resgatar o caráter visual e concreto da matemática, que muitas vezes no ensino médio é apresentada de maneira abstrata.

Com a execução desta sequência de aulas, vimos que o papel do professor de matemática vai além da exposição de conteúdo. É preciso, que o mesmo elabore atividades que envolvam a manipulação, ou seja, que proporcione experiências concretas aos alunos, para que assim, estes construam de maneira mais significativa o conhecimento, para que transitem entre o conheci-

mento matemático concreto e abstrato.

Ademais, concluímos, que a utilização de materiais manipuláveis no ensino de Geometria Plana, torna a abordagem do conteúdo mais clara e atrativa, motivando o interesse dos alunos no processo de aprendizagem e auxiliando os mesmos através da visualização dos conceitos apresentados, fazendo com que entendam e fixem conceitos importantes de Geometria.

Agradecimentos

Agradecemos a nossa orientadora professora Francieli Cristina Agostinetto Antunes, pelo suporte e incentivo na elaboração e aplicação das atividades.

Aos membros constituintes do Colégio Estadual Horácio Ribeiro dos Reis, que nos acolheram cordialmente durante todo o processo e em especial ao professor regente do 3º ano, que nos cedeu à turma e nos deu apoio para o que nos foi necessário.

E por último, mas não menos importante aos alunos que foram de fundamental importância para o desenvolvimento de nossas atividades.

Referências

- BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM). Ensino Médio. Brasília: MEC, 1997.
- GUSMÃO, L. D. Educação matemática pela arte: uma defesa da educação da sensibilidade no campo da matemática. 2013-152f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação em Ciências e em Matemática. Universidade Federal do Paraná, Curitiba/PR.
- GRAELLS, P. M. (2000). Los médios didácticos. Disponível em: <<http://dewey.uab.es/pmarques/medios.htm>>. Acesso em: 09 out. 2018.
- LORENZATO, S. (1995) “Por que não ensinar Geometria?”, Educação Matemática em Revista, SBEM, São Paulo. n° 4 , pp. 3-13.
- LORENZATO, S. (2006). Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In Sérgio Lorenzato, (org.). O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados.
- NCTM (1991). Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar. Lisboa, Portugal: APM e IIE.
- PARANÁ. Diretrizes Curriculares da Educação Básica (DCE). Matemática. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. Departamento de Educação Básica. Paraná: 2008.
- PINHEIRO, C. de F. E. *Os materiais manipuláveis e a geometria: um estudo no 6º ano de escolaridade do Ensino Básico num contexto das isometrias*. 2012. 193 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Didática da Matemática e das Ciências da Natureza, Instituto Politécnico de Viana do Castelo, Viana do Castelo, 2012. Disponível em: <<http://repositorio.ipv.pt/bitstream/20.500.11960/1408/1/Carina.Pinheiro.pdf>>. Acesso em: 10 out. 2018.

- SILVEIRA, D; Novello, T & Laurino, D (2011). O uso de materiais concretos no ensino da matemática nas primeiras etapas de escolarização. Revista Jr de Iniciação Científica em Ciências Exatas e Engenharia, v.2, n.2, p. 19-22. Disponível em: <http://c3.furg.br/arquivos/download/silveira_novello_laurino.pdf>. Acesso em: 09 out. 2018.
- Vale, I. (2002). Materiais Manipuláveis. ESEVC: LEM.

Derivada fracionária de Caputo de funções elementares

Fernanda Paula John

Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Campus Cascavel
ferpjohn@gmail.com

Sandro Marcos Guzzo

Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Campus Cascavel
smguzzo@gmail.com

Resumo: Neste trabalho estudaremos a derivada fracionária de Caputo, para isso, utilizaremos algumas funções auxiliares (função Gama e função de Mittag-Leffler), ainda, definiremos a integral e derivada fracionária de Riemann-Liouville. Exploraremos também, a derivada fracionária de Caputo das funções elementares.

Palavras-chave: Cálculo fracionário; Derivada fracionária de Caputo; Funções elementares;

1 Introdução

O cálculo fracionário é uma teoria de integrais e derivadas de arbitragem real ou de ordem complexa. É uma generalização do cálculo clássico e, portanto, preserva muitas das propriedades básicas. Essa área oferece novos recursos para pesquisa e, assim, torna-se cada vez mais usada em várias aplicações.

Nas seções a seguir não apresentaremos todas as demonstrações, as mesmas estão disponíveis em Ishteva (2005).

2 Função Gama

Definição 1. A função Gama é a função que a cada real positivo $x > 0$ associa o número real representado por $\Gamma(x)$ determinado pela integral imprópria

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{(x-1)} e^{-t} dt. \quad (1)$$

É possível mostrar que esta função está bem definida, isto é, que a integral imprópria converge qualquer que seja $x \in (0, \infty)$.

Também pode-se perceber que não existe $\Gamma(0)$ já que a integral diverge quando $x = 0$. De fato, da definição (1) com $x = 0$ temos que

$$\Gamma(0) = \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{1}{t} dt > \int_0^1 e^{-1} \frac{1}{t} dt > \int_0^1 \frac{1}{e} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{e} \int_0^1 \frac{1}{t} dt = \infty.$$

É possível definir a função gama no conjunto dos números complexos, porém neste texto não temos interesse na definição desta função para números negativos ou a valores complexos.

Proposição 2. Se $x > 0$, então $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Prova. A prova é feita usando integração por partes. Primeiro temos que

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt.$$

Colocando então $u = t^x$ e $\frac{dv}{dt} = e^{-t}$, temos que $\frac{du}{dt} = xt^{x-1}$ e $v = -e^{-t}$, donde

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt \\ &= t^x (-e^{-t}) \Big|_{t=0}^{\infty} + \int_0^{\infty} xt^{x-1} e^{-t} dt \\ &= (0+0) + x \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= x \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x).\end{aligned}$$

□

Corolário 3. Se $n \in \mathbb{N}^*$, então $\Gamma(n) = (n-1)!$.

3 Função de Mittag-Leffler

Definiremos as funções de Mittag-Leffler apenas para números reais, mas cabe ressaltar, que elas podem ser definidas também para valores complexos.

Definição 4. A função de Mittag-Leffler a um parâmetro real $\alpha > 0$ é a função que a cada $x \in \mathbb{R}$, associa um número real $E_{\alpha}(x)$ dado por

$$E_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

É possível mostrar que essa série, que define a função, é convergente para qualquer valor de x .

Note que se $\alpha = 1$ temos que

$$E_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x,$$

e por esse motivo a função de Mittag-Leffler a um parâmetro é conhecida como função exponencial generalizada. Além disso,

$$E_2(-x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x.$$

Definição 5. A função de Mittag-Leffler a dois parâmetros reais $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ é a função que a cada $x \in \mathbb{R}$, associa o número real

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}.$$

Observe que se $\beta = 1$ temos que

$$E_{\alpha,1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_{\alpha}(x),$$

e então a função de Mittag-Leffler a dois parâmetros é uma generalização da função de Mittag-Leffler a um parâmetro. Nestes termos também fica claro que

$$E_{1,1}(x) = E_1(x) = e^x$$

$$E_{2,1}(-x^2) = E_2(-x^2) = \cos x,$$

e além disso, agora conseguimos

$$xE_{2,2}(-x^2) = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{\Gamma(2k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin x.$$

4 Integral fracionária de Riemann-Liouville

Nesta seção, discutiremos a definição de integral fracionária dada por Riemann-Liouville e algumas propriedades.

Durante toda seção, usaremos o símbolo $\frac{d}{dt}$ para designar o operador derivada de uma função (derivável) e o operador J para designar o operador integral de uma função (integrável) em um certo intervalo $[a, b]$. Desta forma, para todo $t \in [a, b]$, temos

$$\frac{d}{dt}f(t) = \frac{df}{dt}(t) = f'(t),$$

e

$$(Jf)(t) = J(f)(t) = J(f(t)) = \int_a^t f(s)ds.$$

Derivações e integrações sucessivas são portanto definidas recursivamente por

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n}f(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}f(t) \right)$$

e

$$(J^n f)(t) = J((J^{n-1} f)(t)),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$.

A próxima proposição expressa um resultado do cálculo diferencial e integral clássico, conhecido como identidade de Cauchy para integrais repetidas, que motiva a definição da Integral fracionária de Riemann-Liouville.

Proposição 6. (*Identidade de Cauchy*). Se f é uma função integrável em um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, e $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 1$, então

$$(J^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s) ds.$$

Proposição 7. Se $n \in \mathbb{N}^*$ e f é contínua em $[a, b]$, então $\frac{d^n}{dt^n} (J^n f)(t) = f(t)$.

Definição 8. Suponha que $f(t)$ seja contínua em $[a, b] \subset \mathbb{R}$. A integral de Riemann-Liouville de ordem $\alpha > 0$ da função denotada por $J_{a+}^\alpha(f)(t)$ ou por $(J_{a+}^\alpha f)(t)$ e definida por

$$J_{a+}^\alpha(f)(t) = (J_{a+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds.$$

Cabe ressaltar que a integral está bem definida, pois $f(s)$ e $(t-s)^{\alpha-1}$ são integráveis em $[a, t]$ qualquer que seja $\alpha > 0$. Porém, bastaria que f fosse integrável em $[a, b]$. Se f é contínua pode-se provar que quando $\alpha \rightarrow 0^+$ então $J_{a+}^\alpha(f) \rightarrow f$ uniformemente.

Teorema 9. (*Lei dos expoentes*). Se f é uma função contínua em $[a, b] \subset \mathbb{R}$, então

$$J_{a+}^\alpha(J_{a+}^\beta f) = J_{a+}^{\alpha+\beta} f = J_{a+}^\beta(J_{a+}^\alpha f).$$

5 Derivada fracionária de Caputo

A noção de derivada de ordem fracionária segundo Caputo, leva em conta a definição de integral fracionária de Riemann-Liouville. O leitor deve estar familiarizado pela seção anterior com a noção de integral fracionária de Riemann-Liouville e suas propriedades.

Definição 10. Seja $\alpha > 0$ um número real e $n \in \mathbb{N}$ de forma que $n-1 \leq \alpha < n$. Se f é uma função contínua em $[a, b] \subset \mathbb{R}$ com n derivadas contínuas em (a, b) , então a derivada fracionária de Caputo de ordem α de f , definida em $[a, b]$ é a função dada por

$$\begin{aligned} {}_C D_{a+}^\alpha(f)(t) &= ({}_C D_{a+}^\alpha f)(t) = \left(J_{a+}^{n-\alpha} \frac{d^n f}{ds^n} \right)(t) \\ &= (J_{a+}^{n-\alpha} f^{(n)})(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} \frac{d^n f}{ds^n}(s) ds, \end{aligned}$$

sendo que J_{a+} se refere à integral fracionária de Riemann-Liouville e $\frac{d^n f}{ds^n} = f^{(n)}$ se refere à derivada de ordem n de f .

Em toda essa seção, estamos exclusivamente nos referindo à noção de derivada de Caputo e portanto usaremos apenas a notação D_{a+}^α .

A definição de derivada de ordem fracionária de Caputo, em geral, não coincide com a definição usual quando α é um número inteiro positivo. Se $\alpha = n-1 \in \mathbb{N}^*$, então $n-\alpha = 1$ e então,

$$(D_{a+}^{n-1} f)(t) = (J_{a+}^1)(f) = \int_a^t f^{(n)}(s) ds$$

$$= \int_a^t \frac{d}{ds} \left(f^{(n-1)}(s) \right) ds = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(a).$$

Se a escolha de a for feita de forma que $f^{(n-1)}(a) = 0$, então recupera-se o resultado clássico. Além disso, se $n - 1 \leq \alpha < n$ e f tiver derivadas até ordem $n + 1$ contínuas em $[a, t]$, então podemos provar que

$$\lim_{\alpha \rightarrow n} (D_{a+}^{\alpha} f)(t) = f(t).$$

De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow n} (D_{a+}^{\alpha} f)(t) &= \lim_{\alpha \rightarrow n} \left(J_{a+}^{n-\alpha} \frac{d^n f}{dt^n} \right) (t) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow n} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} \frac{d^n f}{ds^n}(s) ds, \end{aligned}$$

e fazendo uma integração por partes escolhendo $u = \frac{d^n f}{ds^n}$ e $\frac{dv}{ds} = (t-s)^{n-\alpha-1}$, temos que $\frac{du}{ds} = \frac{d^{n+1} f}{ds^{n+1}}$ e $v = -\frac{1}{n-\alpha} (t-s)^{n-\alpha}$, e levando em conta a (2), assim $(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha) = \Gamma(n-\alpha+1)$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow n} (D_{a+}^{\alpha} f)(t) &= \lim_{\alpha \rightarrow n} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left[-\frac{(t-s)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \frac{d^n f}{ds^n}(s) \Big|_{s=a}^t + \frac{1}{n-\alpha} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha} \frac{d^{n+1} f}{ds^{n+1}}(s) ds \right] \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow n} \left[\frac{(t-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \frac{d^n f}{ds^n}(a) + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha} \frac{d^{n+1} f}{ds^{n+1}}(s) ds \right] \\ &= \frac{d^n f}{ds^n}(a) + \int_a^t \frac{d^{n+1} f}{ds^{n+1}}(s) ds \\ &= \frac{d^n f}{ds^n}(a) + \left[\frac{d^n f}{ds^n}(s) \right]_{s=a}^t = \frac{d^n f}{ds^n}(t). \end{aligned}$$

Teorema 11. (Fundamental do cálculo de Caputo). Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ com $\alpha > 0$, e $n \in \mathbb{N}^*$ de forma que $n - 1 \leq \alpha < n$. Se f é uma função contínua em $[a, b] \subset \mathbb{R}$, então para qualquer $t \in [a, b]$, temos que

$$D_{a+}^{\alpha} (J_{a+}^{\alpha} f)(t) = f(t),$$

e se f possui derivada de ordem n contínua em $[a, b]$, então

$$J_{a+}^{\alpha} (D_{a+}^{\alpha} f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a).$$

6 Derivadas Fracionárias de Caputo de funções elementares

6.1 Função constante

Teorema 12. Utilizando a derivada fracionária de Caputo temos

$${}_C D_{a+}^{\alpha} c = 0$$

Prova. Temos que $0 < n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$, o que implica que $n > 1$. Aplicando a definição de derivada fracionária de Caputo e sendo a n -ésima derivada $c^{(n)}$ ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$) a derivada da

função constante é igual a 0, segue que

$${}_CD_{a+}^{\alpha} c = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{c^{(n)}}{(t-s)^{\alpha+1-n}} ds = 0.$$

□

6.2 Função Exponencial

Teorema 13. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ com $\alpha > 0$, então

$${}_CD_{0+}^{\alpha}(e^{\lambda t}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+k} t^{n+k-\alpha}}{\Gamma(k+1+n-\alpha)},$$

qualquer que seja $\lambda \in \mathbb{R}$.

Prova. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ com $\alpha > 0$, seja $n \in \mathbb{N}$ de forma que $n-1 \leq \alpha < n$. Da definição de derivada de Caputo temos que

$${}_CD_{0+}^{\alpha}(e^{\lambda t}) = J_{0+}^{n-\alpha} \left(\frac{d^n}{dt^n} e^{\lambda t} \right).$$

Assim, usando a definição de integral fracionária de Riemann-Liouville obtemos

$${}_CD_{0+}^{\alpha}(e^{\lambda t}) = J_{0+}^{n-\alpha}(\lambda^n e^{\lambda t}) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} e^{\lambda s} ds.$$

Usando a série de potências da função exponencial temos que

$$\begin{aligned} {}_CD_{0+}^{\alpha}(e^{\lambda t}) &= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k s^k}{k!} ds \\ &= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k s^k}{\Gamma(k+1)} ds. \end{aligned}$$

Como a série converge e a integral de cada termo da série converge, podemos comutar o sinal de integral com o sinal de somatório e obtemos

$$\begin{aligned} {}_CD_{0+}^{\alpha}(e^{\lambda t}) &= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k s^k}{\Gamma(k+1)} ds \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+k}}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(k+1)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} s^k ds. \end{aligned}$$

Para a integral do segundo membro usamos integração por partes e escolhendo $u = s^k$ e $\frac{dv}{ds} = (t-s)^{n-\alpha-1}$ temos $\frac{du}{ds} = ks^{k-1}$ e $v = -\frac{(t-s)^{n-\alpha}}{n-\alpha}$ e com isso,

$$\begin{aligned} {}_CD_{0+}^{\alpha}(e^{\lambda t}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+k}}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(k+1)} \left[-\frac{(t-s)^{n-\alpha} s^k}{n-\alpha} \Big|_{s=0}^t + \frac{k}{n-\alpha} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha} s^{k-1} ds \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+k} k}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(k+1)(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha} s^{k-1} ds \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+k}}{\Gamma(n-\alpha+1)\Gamma(k)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha} s^{k-1} ds.$$

Após mais $(k-1)$ integrações por partes obteremos

$${}_CD_{0+}^{\alpha}(e^{\lambda t}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+k}}{\Gamma(n-\alpha+k)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha+k-1} ds,$$

e então

$$\begin{aligned} {}_CD_{0+}^{\alpha}(e^{\lambda t}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+k}}{\Gamma(n-\alpha+k)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha+k-1} ds \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+k}}{\Gamma(n-\alpha+k)} \left[-\frac{(t-s)^{n-\alpha+k}}{n-\alpha+k} \right]_{s=0}^t \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+k}}{\Gamma(n-\alpha+k)} \frac{t^{n-\alpha+k}}{n-\alpha+k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+k} t^{n-\alpha+k}}{\Gamma(n-\alpha+k+1)}, \end{aligned}$$

como desejado. □

6.3 Funções Trigonométricas

Teorema 14. *Sejam $\lambda \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n-1 < \alpha < n$, temos*

$${}_CD_{a+}^{\alpha} \sin(\lambda t) = -\frac{1}{2} i (i\lambda)^n t^{n-\alpha} (E_{1,n-\alpha+1}(i\lambda t) - (-1)^n E_{1,n-\alpha+1}(-i\lambda t)).$$

Prova. Usaremos a representação

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

para a função seno, vamos aplicar a definição da derivada fracionária de Caputo e utilizar a fórmula para função exponencial, assim

$$\begin{aligned} {}_CD_{a+}^{\alpha} \sin(\lambda t) &= {}_CD_{a+}^{\alpha} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ &= \frac{1}{2} ({}_CD_{a+}^{\alpha} e^{i\lambda t} - e^{-i\lambda t}) \\ &= \frac{1}{2} (i\lambda^n t^{n-\alpha} E_{1,n-\alpha+1}(i\lambda t) - (-i\lambda)^n t^{n-\alpha} E_{1,n-\alpha+1}(-i\lambda t)) \\ &= -\frac{1}{2} i (i\lambda)^n t^{n-\alpha} E_{1,n-\alpha+1}(i\lambda t) - (-1)^n t^{n-\alpha} E_{1,n-\alpha+1}(-i\lambda t). \end{aligned}$$

□

Teorema 15. *Sejam $\lambda \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n-1 < \alpha < n$, segue que*

$${}_CD_{a+}^{\alpha} \cos(\lambda t) = \frac{1}{2} i (i\lambda)^n t^{n-\alpha} (E_{1,n-\alpha+1}(i\lambda t) + (-1)^n E_{1,n-\alpha+1}(-i\lambda t)).$$

A demonstração deste teorema é análoga ao anterior, porém, neste caso, usamos

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i}.$$

7 Conclusão

Ao longo deste trabalho, foram explorados conteúdos de Cálculo Fracionário, mais especificamente no que se refere à Derivada Fracionária de Caputo, com destaque à sua aplicação em funções elementares. Ainda cabe ressaltar que conseguimos alcançar todos os objetivos propostos inicialmente, a saber: calcular a Derivada Fracionária de Caputo das funções elementares (função constante, função exponencial, função seno e função cosseno).

8 Referências bibliográficas

- Camargo, Rubens Figueiredo & Oliveira, Edmundo Capelas de. *Cálculo fracionário*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.
- Ishteva, Mariya K. *Properties and applications of the Caputo fractional operator*. Master Thesis. 2005.
- Kilbas, Anatoly A.; Srivastana, Hari M.; Trujillo, Juan J. *Theory and application of fractional differential equations*. North-Holland Mathematics Studies. Amsterdam: Elsevier, 2006.
- Podlubny, Igor. *Fractional differential equations*. Mathematics in science and engineering, vol 198. Academic press, 1999.
- Rahimy, Mehdi. *Applications of fractional differential equations*. Applied Mathematical Sciences, Vol. 4, 2010, No. 50, 2453-2461.

Resumos expandidos

Representação da estrutura espacial de variáveis com dependência espacial

Franciele Buss Frescki Kestring
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
francielefrescki@gmail.com

Luciana Pagliosa Carvalho Guedes
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
luciana_pagliosa@hotmail.com

Victor Martins da Silva¹
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
victoreagri@gmail.com

Miguel Angel Uribe Opazo
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
mopazo@uol.com.br

Resumo: A agricultura de precisão corresponde a um conjunto de técnicas e tecnologias desenvolvidas para melhorar o gerenciamento do solo e de plantas cultivadas em áreas agrícolas, e a geoestatística é uma ferramenta para esse processo. Este trabalho teve por objetivo estudar e aplicar as diferentes etapas de uma análise geoestatística em dados do ano agrícola 2006/2007, de uma área comercial de cultivo de soja, localizada em Cascavel, Paraná. As variáveis utilizadas foram produtividade e resistência do solo à penetração em três camadas: 0-10 cm, 10-20 cm e 20-30 cm. Foi observada a dependência espacial nas variáveis produtividade e resistência do solo a penetração na camada 0-10 cm, pois apresentaram efeito pepita relativo menor que 75%. Os maiores valores de resistência do solo à penetração foram para as camadas 10-20 cm, possivelmente por causa do intenso tráfego de máquinas para o manejo da área. Mais de 60% da área analisada apresentou uma produção média variando de 2,18 a 2,22 t ha⁻¹. Assim, a geoestatística permitiu a análise da variabilidade espacial das variáveis estudadas e a representação da estrutura de dependência espacial para a área comercial em questão.

Palavras-chave: Agricultura de Precisão; Geoestatística; Semivariância.

1 Introdução

A agricultura de precisão (AP) diz respeito a uma série de tecnologias e técnicas para aperfeiçoar o gerenciamento do solo e de plantas cultivadas em áreas agrícolas. Ela permite monitorar, em escala local, a variabilidade da produção e das variáveis que atuam sobre o desenvolvimento das plantas.

Entre as muitas técnicas aplicadas como ferramenta para a AP está a geoestatística, que, por meio de análises matemáticas e estatísticas, preocupa-se com o entendimento e modelagem

¹Bolsista PIBIC do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

de variáveis que apresentam estrutura de dependência espacial, e leva em consideração a ideia de correlação espacial entre as amostras.

Com o avanço das tecnologias e sistemas de processamento de dados, novas técnicas geoestatísticas têm sido desenvolvidas. Desta maneira, tendo em vista que a geoestatística é uma área de conhecimento ampla e em pleno desenvolvimento como ferramenta de aplicação para a AP, seu estudo se mostra de grande utilidade para o gerenciamento agrícola sustentável. Assim, este trabalho teve por objetivo estudar e aplicar as diferentes etapas de uma análise geoestatística em um conjunto de dados agrícolas real.

2 A geoestatística e suas técnicas

A geoestatística diferencia-se da estatística clássica, pois considera a localização e a dependência espacial do conjunto de observações estudadas, baseada na Teoria das Variáveis Regionalizadas (MATHERON, 1963; OPAZO, ROJAS e DE BASTIANI, 2015). No estudo da estrutura de dependência espacial de uma variável regionalizada são utilizadas as funções semi-variância, covariância e autocorrelação espacial, que permitem apresentar a dependência entre elementos amostrais vizinhos por meio de modelos espaciais. Desse modelo são obtidas estimativas de parâmetros que caracterizam as medidas de correlação existentes entre valores tomados em dois pontos no espaço e do raio de dependência entre os elementos amostrais (OPAZO, ROJAS e DE BASTIANI, 2015).

O semivariograma é o gráfico da função semivariância versus a distância. Ele serve para analisar a estrutura de dependência espacial entre os elementos amostrais dentro de um espaço paramétrico, sendo que a estrutura de dependência espacial obtida do ajuste de um modelo teórico é utilizada nas estimativas de valores para locais não amostrados, por meio da técnica de krigagem (DIGGLE e RIBEIRO JR, 2007).

A estrutura de dependência espacial é estimada por meio do ajuste de um modelo teórico à função semivariância amostral e as estimativas dos parâmetros do modelo ajustado são obtidas através dos dados amostrais utilizando métodos estatísticos. Dentre os modelos mais conhecidos estão o esférico, o exponencial e a família Matérn (OPAZO, ROJAS e DE BASTIANI, 2015).

Quando os semivariogramas construídos para diferentes direções sugerem o mesmo padrão de continuidade espacial, o fenômeno em estudo é considerado isotrópico. Nesse caso, o estudo da dependência espacial pode ser realizado utilizando apenas um semivariograma, denominado semivariograma omnidireccional, em que as semivariâncias são estimadas com informações de todas as direções. Em caso contrário, o fenômeno será chamado anisotrópico, podendo apresentar anisotropia geométrica, anisotropia zonal ou anisotropia mista (ambos os tipos de anisotropia) (GUEDES et al., 2008).

A escolha de um bom modelo ajustado aos dados não é um procedimento automático, requer um bom julgamento baseado na experiência e compreensão das limitações da função. Os métodos estatísticos mais frequentes de estimação de parâmetros apresentados na literatura são:

Mínimos Quadrados Ordinários, Mínimos Quadrados Generalizados, Mínimos Quadrados Ponderados, Máxima Verossimilhança e Máxima Verossimilhança Restrita (DIGGLE e RIBEIRO JR, 2007).

Para efetuar validação dos resultados obtidos pelo ajuste e escolher o melhor modelo algumas técnicas podem ser utilizadas, como validação cruzada, critério de Akaike e o máximo do logaritmo da função verossimilhança, entre outros (DIGGLE e RIBEIRO JR, 2007).

Após a escolha do modelo mais adequado, procede-se a construção de um mapa temático representativo da área e, em geral, utiliza-se uma técnica de interpolação chamada krigagem, a qual usa a estrutura de dependência espacial obtida pelo ajuste de um modelo espacial, para estimar valores em locais não amostrados, tendo estimativas sem tendência e com variância mínima (DIGGLE e RIBEIRO JR, 2007). Os mapas temáticos gerados pelos métodos geoestatísticos são excelentes recursos para as análises do desempenho das variáveis na área em estudo.

3 Metodologia

Os dados utilizados neste trabalho são provenientes dos estudos dos laboratórios de Estatística Espacial e Estática Aplicada da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE), oriundos de uma área agrícola comercial com cultivo de soja, com solo Latossolo Vermelho Distroférrico. Para o ano agrícola 2006/2007 foram utilizados dados de produtividade ($t\ ha^{-1}$) e resistência do solo à penetração RSP (KPa) em três camadas de profundidade: 0-10 cm, 10-20 cm e 20-30 cm coletados numa malha amostral *lattice plus close pairs* (DIGGLE e RIBEIRO JR, 2007) com 102 pontos amostrais.

Os dados foram submetidos inicialmente à análise descritiva geral, sem considerar a posição das amostras. Num segundo momento, foram realizadas as análises geoestatísticas, com avaliação da existência de anisotropia, construção do semivariograma experimental e ajuste aos modelos esférico e exponencial utilizando o método de Máxima Verossimilhança para a estimação dos parâmetros. A escolha do melhor modelo foi feita por validação cruzada e a confecção dos mapas temáticos deu-se pela interpolação por krigagem ordinária. Para a análise geoestatística clássica foi utilizado o *software* livre R (R CORE TEAM, 2018), sendo utilizado o pacote geoR (RIBEIRO JUNIOR, DIGGLE, 2001).

4 Resultados e Discussões

Os valores das estimativas dos parâmetros dos modelos geoestatísticos escolhidos por validação cruzada estão apresentados na Tabela 1.

Tabela 1: Estimativas dos parâmetros para escolha do modelo.

Variável	Modelo	EP	Contribuição	Patamar	Alcance	EPR
Produtividade	Esf	0,490	0,437	0,927	701,21	52,842
RPS 0-10 cm	Exp	0,456	0,560	1,017	1184,54	44,888
RPS 10-20 cm	Esf	0,255	0,000	0,255	351,56	100,00
RPS 20-30 cm	Esf	0,152	0,009	0,161	567,99	94,349

EP: efeito pepita. EPR: efeito pepita relativo (CAMBARDELLA et al., 1994). Esf: esférico.
Exp: exponencial.

Foi observada a dependência espacial principalmente para as variáveis produtividade e RSP 0-10 cm, pois se obteve um efeito pepita relativo menor que 75% (CAMBARDELLA et al., 1994) e, além disso, o raio de dependência espacial variou de 351,56 a 1184,54 metros (Tabela 1). Os mapas temáticos por krigagem para as quatro variáveis em estudo estão dispostos na Figura 1.

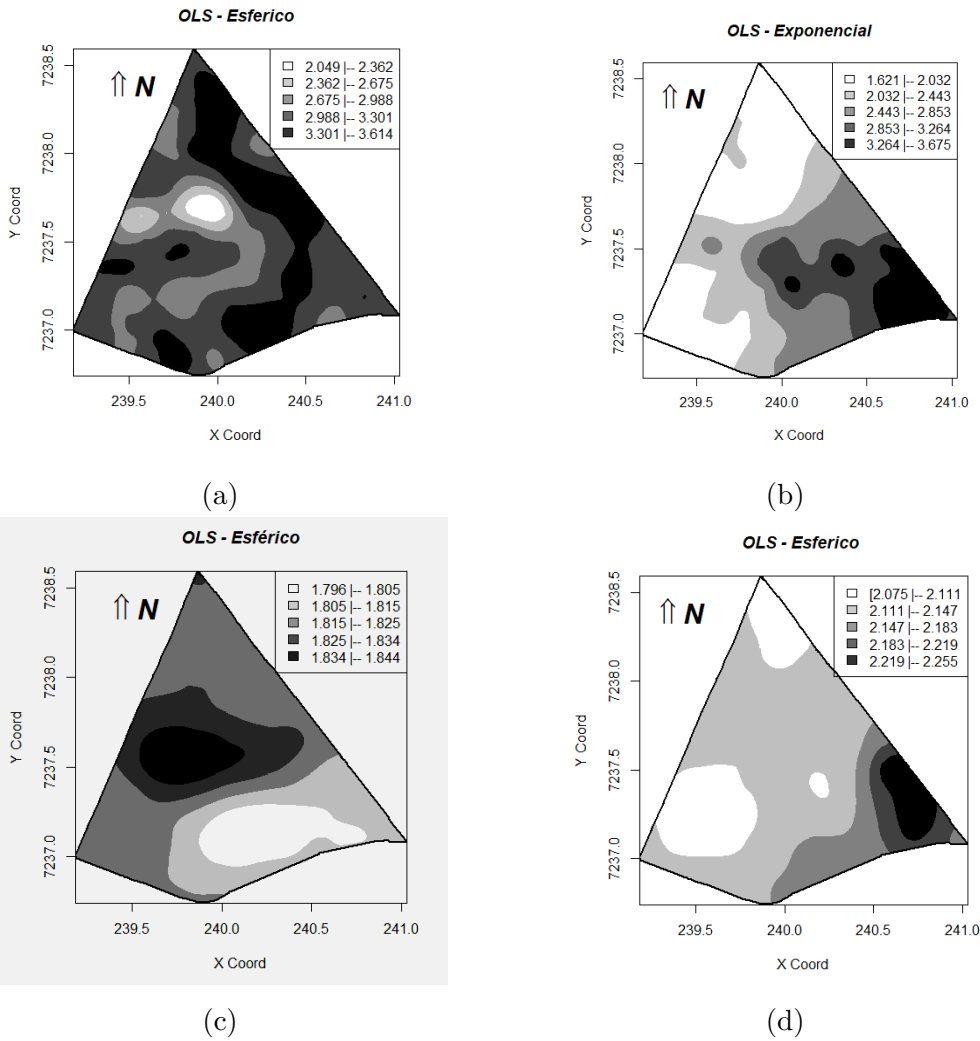


Figura 1: Mapas Temáticos: (a) Produtividade; (b) RSP 0-10 cm; (c) RSP 10-20 cm; (d) RSP 20- 30 cm.

Mais de 60% da área apresentou uma produção média variando de 2,18 a 2,22 t ha⁻¹

(Figura 1a). A variável RSP 0-10 cm apresentou compactação, provavelmente pela presença contínua de cobertura vegetal, agindo no aumento do teor de umidade na camada superficial do solo no sistema de plantio direto, proporcionando uma redução dos valores de resistência mecânica à penetração e desempenhando papel significativo nas propriedades físicas do solo. Os maiores valores de RSP ocorreram para as camadas 10-20 cm, valores classificados como alto, possivelmente por causa do intenso tráfego de máquinas de grande porte utilizado manejo da área.

Conclusões

As técnicas geoestatísticas permitiram a análise da variabilidade espacial das variáveis estudadas, sendo que a função semivariância nos possibilitou representar a estrutura de dependência espacial. Assim, a geoestatística pode auxiliar nas decisões estratégicas em relação ao gerenciamento do sistema de produção agrícola de alta qualidade, contribuindo para o desenvolvimento sustentável na agricultura de precisão.

Referências

- CAMBARDELLA, C. A.; MORMAN, T. B.; NOVAK, J. M.; PARKIN, T. B.; KARLEN, D. L.; TURCO, R. F.; KONOPKA, A. E. Field-scale variability of soil properties in Central Iowa Soils. **Soil Science Society of America Journal**, v. 58, p.1501-1511. 1994.
- DIGGLE, P. J.; RIBEIRO JR, P. J. **Model Based Geostatistics**. Ed. New York: Springer, 2007, 230 p.
- GUEDES, L. P. C.; URIBE-OPAZO, M. A.; JOHANN, J. A.; SOUZA, E. G. Anisotropia no estudo da variabilidade espacial de algumas variáveis químicas do solo. **Revista Brasileira de Ciência do Solo**, Viçosa, v. 32, n. 6, p. 2217-2226, 2008.
- MATHERON, G. Principles of Geostatistics. **Economy Geology**, Lancaster, n. 58, p. 1246-1266, 1963.
- OPAZO, M. A. U.; ROJAS, M. G.; DE BASTIANI, F. **Geoestatística Aplicada à Engenharia Agrícola**, 2015.
- R CORE TEAM. R: **A language and environment for statistical computing**. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2018. <http://www.R-project.org/>
- RIBEIRO JR., P.J.; DIGGLE, P.J. geoR: A package for geostatistical analysis. **R-NEWS**, v. 1, n. 2, p. 1609-3631, 2001.

Índice de autores

- Alexandre Batista de Souza, 41, 119
Amarildo de Vicente, 9
Ana Cristina Dellabetta Guerrero, 31, 207
Ana Maria Foss, 89, 99
André Wilson de Vicente, 9

Cláudia Brandelero Rizzi, 9
Cléia Fabiane Winck, 227, 239
Clezio Aparecido Braga, 53

Daniele Donel, 31, 207
Diessica Aline Quinot, 239

Edilza Martins da Silva, 141

Fabiana Fatina Delabona, 195
Fabiana Magda Garcia Papani, 19, 149, 215
Fernanda Paula John, 255
Flavio Roberto Dias Silva, 41, 195
Franciele Buss Frescki Kestring, 265
Francieli Cristina Agostinetto Antunes, 171, 247

Henrique Zanelatto, 171

Janaina Maria de Lima Gonçalves, 109
Jaqueline do Nascimento, 247
Jerry Adriani Johann, 141
João Augusto Brandalize, 53
Joel Ireno Branco, 119
Johnaton Rocha Pidorodeski, 161
Juliana Anjelika Santos de Souza, 247

Kaio Arlei Strelow, 19

Laura Massuda Crema, 215
Lucas Campos de Araújo, 149
Lucas Teixeira Bernardo, 161
Luciana Pagliosa Carvalho Guedes, 141, 265

Mariana da Rosa, 129
Matheus Alexandre Alves Anzolin, 183
Miguel Angel Uribe Opazo, 265

Paulo Domingos Conejo, 129, 183
Pedro Pablo Durand Lazo, 65, 77
Priscila Pigatto Gasparin, 141

Rogério Luiz Rizzi, 9
Rosangela Villwock, 109

Sandro Marcos Guzzo, 227, 255

Tiago Emanuel Klüber, 207

Ueslei Mallmann, 171

Victor Martins da Silva, 265
Viviane Fátima Ribeiro, 89